# ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE

Vincenzo Di Gennaro

Sono raccolti, in ordine cronologico, gli esercizi di Algebra Lineare proposti nelle prove scritte per i vari corsi di "Geometria 1" che ho tenuto presso la Facoltà di Ingegneria di Tor Vergata, a partire dal 2001 (ad eccezione dell' anno accademico 2005-06). Gli esercizi sono svolti, e lo svolgimento tiene conto delle lezioni date durante i corsi. Nello svolgimento degli esercizi, alcuni dettagli sono lasciati alla cura dello studioso lettore.

Vincenzo Di Gennaro
Roma, 30 giugno 2008

*Ultimo aggiornamento: 4 febbraio 2012*

## Geometria ed Algebra 1, I esonero, 22 ottobre 2001.

**Esercizio 1.** *Stabilire se il sottoinsieme* $X := \{(x, y) : xy \geq 0\}$ *di* $\mathbf{R}^2$ *è oppure no un sottospazio.*

*Svolgimento.* $X$ non è un sottospazio in quanto non è stabile rispetto alla somma. Infatti i vettori $(2, 3)$ e $(-1, -4)$ appartengono ad $X$, ma la loro somma $(2, 3) + (-1, -4) = (1, -1)$ no (per inciso, si osservi che $X$ possiede il vettore nullo, ed è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna: infatti se $(x, y) \in X$ e $c$ è uno scalare qualunque, allora $c \cdot (x, y) = (cx, cy)$, e $(cx)(cy) = c^2xy \geq 0$ perché $c^2$ non altera il segno di $xy$). ■

**Esercizio 2.** *Si considerino i sottospazi* $U := Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2))$ *e* $V := Span((1, 8, 11, 16))$ *di* $\mathbf{R}^4$. *Calcolare* $dim\, U$, $dim\, V$, $dim\,(U + V)$ *e* $dim\,(U \cap V)$.

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che $dim\, U = 2$ perché i due generatori di $U$ non sono uno multiplo dell'altro, e che $dim\, V = 1$ in quanto il generatore di $V$ non è il vettore nullo.

Sappiamo che $U + V = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2), (1, 8, 11, 16))$. Per calcolarne la dimensione andiamo a vedere se i tre generatori sono legati oppure no, cioè se essi ammettono, oppure no, una relazione non banale. A tale proposito, sia $(x, y, z)$ una qualunque relazione tra i generatori di $U+V$. Allora si ha: $x(1, 2, 3, 4)+y(-1, 1, 1, 2)+z(1, 8, 11, 16) = \mathbf{0}$, cioè si ha il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + 8z = 0 \\ 3x + y + 11z = 0 \\ 4x + 2y + 16z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette come soluzione non banale la terna $(x, y, z) = (3, 2, -1)$. Ciò significa che $3(1, 2, 3, 4) + 2(-1, 1, 1, 2) - 1(1, 8, 11, 16) = \mathbf{0}$, cioè i tre generatori sono legati. In particolare vediamo che $(1, 8, 11, 16)$ è sovrabbondante. Dunque:

$$U + V = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2), (1, 8, 11, 16)) = Span((1, 2, 3, 4), (-1, 1, 1, 2)) = U.$$

Quindi $dim\,(U + V) = dim\, U = 2$. Inoltre, poiché $V \subseteq U + V$, e $U + V = U$, allora $V \subseteq U$, quindi $V = U \cap V$, e $dim\,(U \cap V) = dim\, V = 1$. ■

**Esercizio 3.** *Per quali valori di* $k$ *i vettori* $(1, 1, 1)$, $(1, k, 2)$, $(1, 1, k - 1)$ *sono linearmente dipendenti?*

*Svolgimento.* Se $(x, y, z)$ è una relazione per i tre vettori assegnati, allora abbiamo: $x(1,1,1)+y(1,k,2)+z(1,1,k-1) = \mathbf{0}$. Ciò equivale a dire che:

$$(*)\qquad \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ky+z=0 \\ x+2y+(k-1)z=0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla seconda equazione la prima, deduciamo che: $(k-1)y=0$. Quindi, se $k \neq 1$, allora $y=0$. In tal caso, sostituendo $y=0$, il sistema lineare diventa:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \\ x+(k-1)z=0. \end{cases}$$

Sottraendo dalla terza equazione la prima, otteniamo: $(k-2)z=0$. Quindi se $k \neq 2$, allora anche $z=0$, a fortiori $x=0$, e i vettori assegnati sono liberi. Rimangono da studiare i due casi $k=1$ e $k=2$.

Quando $k=1$, il sistema $(*)$ diventa:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+2y=0, \end{cases}$$

ed un calcolo diretto mostra che $(-2,1,1)$ è una relazione non banale. In modo analogo si prova che, quando $k=2$, $(1,0,-1)$ è una relazione non banale.

In conclusione: i vettori assegnati sono linearmente dipendenti se e solo se $k=1$, oppure $k=2$. ■

**Esercizio 4.** *Calcolare le coordinate del vettore* $(1,1,1)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1,-1,2),(1,1,0),(0,0,2)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$.

*Svolgimento.* Le coordinate $(x,y,z)^T$ si calcolano imponendo che $(1,1,1) = x(1,-1,2) + y(1,1,0) + z(0,0,2)$, cioè che:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -x+y=1 \\ 2x+2z=1. \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene che le coordinate di $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(x,y,z)^T = (0,1,\frac{1}{2})^T$. ■

**Esercizio 5.** *Calcolare la dimensione di* $U := Span((1,2,3),(1,1,1),(1,-1,2))$.

*Svolgimento.* Sia $(x,y,z)$ una relazione per i tre vettori assegnati. Abbiamo: $x(1,2,3)+y(1,1,1)+z(1,-1,2) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+y+2z=0. \end{cases}$$

Si deduce che $x=y=z=0$, dunque i tre generatori sono liberi, e perciò la dimensione di $U$ è 3 (in particolare $Span((1,2,3),(1,1,1),(1,-1,2)) = \mathbf{R}^3$). ■

**Esercizio 6.** *Provare che due sottospazi di* $\mathbf{R}^7$ *aventi dimensione* 4*, hanno in comune qualche vettore non nullo.*

*Svolgimento.* Siano $U$ e $V$ tali sottospazi. Dalla formula di Grassmann sappiamo che:

$$dim\,(U \cap V) = dim\,U + dim\,V - dim\,(U+V) = 8 - dim\,(U+V).$$

Poiché $U+V \subseteq \mathbf{R}^7$, allora $dim\,(U+V) \leq 7$, e dunque $-dim\,(U+V) \geq -7$. Per cui, dalla formula precedente otteniamo:

$$dim\,(U \cap V) \geq 8-7=1,$$

cioè $dim\,(U \cap V) > 0$. Ciò significa proprio che $U$ e $V$ hanno in comune qualche vettore non nullo. ■

**Geometria ed Algebra 1, II esonero, 5 novembre 2001.**

**Esercizio 1.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Svolgere la verifica.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_2(-\frac{1}{3})$, $e_{3,2}(2)$, $e_3(-3)$, $e_{2,3}(-\frac{1}{3})$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 2.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Calcolare una base per il sottospazio* $U$ *di* $\mathbf{R}^4$ *definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Ricordiamo che $U$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$. Quindi innanzitutto andiamo a risolvere $\mathcal{S}$. Riducendo a scala la matrice di $\mathcal{S}$, si ottiene la matrice: $M := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ (tale matrice ha rango 2, dunque già sappiamo che la dimensione di $U$ è $2\,(= 4 - rk(M))$). Possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed il sistema assegnato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x - y = -2z + 2t \\ y = 2z - 3t, \end{cases}$$

da cui deduciamo una rappresentazione parametrica per $U$:

$$\rho : (z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-t, 2z - 3t, z, t) \in U.$$

Una base per $U$ si ottiene in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè una base per $U$ è costituita dai vettori: $\rho(1, 0) = (0, 2, 1, 0)$ e $\rho(0, 1) = (-1, -3, 0, 1)$ (in particolare $U = Span((0, 2, 1, 0), (-1, -3, 0, 1))$). $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Trovare una rappresentazione cartesiana per il sottospazio* $U$ *di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* $e_1+e_2+e_3$ *ed* $e_2+e_3-e_1$.

*Svolgimento.* Ricordiamo che una rappresentazione cartesiana per $U$ è un sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}$, il cui insieme delle soluzioni coincide con $U$. In altre parole, occorre trovare le equazioni lineari che definiscono $U$. A tale proposito, ricordiamo che un vettore $\mathbf{u} = (x, y, z)$ appartiene ad $U$ se e solo se il rango della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix}$$

è uguale alla dimensione di $U$ (che nel nostro caso è 2), dove $A$ è la matrice ottenuta mettendo in colonna i vettori che generano $U$, ed il vettore $\mathbf{u}$. Riducendo a scala $A$ si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $A$ è 2 se e solo se $y-z=0$. In conclusione, una rappresentazione cartesiana per $U$ è data dall'equazione: $y-z=0$. ■

**Esercizio 5.** *Al variare del parametro $p \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x+y=1 \\ x+py=p+1. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $p-1$. Per il Teorema di Cramer, se $p \neq 1$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Tale soluzione può essere calcolata con la Regola di Cramer, ed è $(\frac{-1}{p-1}, \frac{p}{p-1})$. Quando $p=1$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni.

Per cui, in conclusione: $\mathcal{S}$ è compatibile se e solo se $p \neq 1$, ed in tal caso ammette un'unica soluzione data da: $(\frac{-1}{p-1}, \frac{p}{p-1})$. ■

**Esercizio 6.** *Estendere a base di $\mathbf{R}^5$ il sistema di vettori $\mathcal{A} := \{(0,0,1,2,0),(0,1,1,1,0),(0,2,0,1,0)\}$.*

*Svolgimento.* Sia $A$ la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{3,2}(2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad $S$ le righe $e_1$ ed $e_5$, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,0,0,0,0),(0,0,1,2,0),(0,1,1,1,0),(0,2,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. ■

## Geometria ed Algebra 1, III esonero, 23 novembre 2001.

**Esercizio 1.** *Si considerino le basi di $\mathbf{R}^2$ $\mathcal{B} := \{(2,1),(5,3)\}$ e $\mathcal{C} := \{(-1,3),(-1,2)\}$. Calcolare la matrice del cambiamento delle coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, e da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.*

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -7 & -18 \end{bmatrix}.$$

Infine, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} -18 & -13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 2.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,2,0)$ e $(0,2,1)$. Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dall'equazione $x+y+z=0$. Determinare una base per $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Sia $(x, y, z)$ un generico vettore di $\mathbf{R}^3$. Allora $(x, y, z) \in V$ se e solo se la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix}$ ha rango $\leq 2$, cioè se e solo se $2x - y + 2z = 0$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è data dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema lineare ammette $\infty^1$ soluzioni, generate da $(1, 0, -1)$. Quindi una base per $U \cap V$ è costituita dal vettore $(1, 0, -1)$. ∎

**Esercizio 3.** *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(x, y, z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 4x+3y+5z)$. Calcolare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1, 2, 4)$, $(1, 1, 3)$. Mentre $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = -2z \\ -y = 3z, \end{cases}$$

è data dal vettore $(1, -3, 1)$. ∎

**Esercizio 4.** *Stabilire se l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x, y) = (3x + y, 3y)$, è diagonalizzabile oppure no.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $A := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è: $p_A(t) = (t - 3)^2$. Dunque abbiamo solo l' autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica $m_a(3) = 2$. D'altra parte:

$$m_g(3) = 2 - rk(A - 3I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Poiché $m_a(3) \neq m_g(3)$, allora $f$ non è diagonalizzabile. ∎

**Esercizio 5.** *Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 15$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-3$ e 5. L'autospazio $V_{-3}$ ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio $V_5$ ammette come base $(1, 1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$). ∎

**Esercizio 6.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $e_1 - 2e_2$, $e_1 + e_3$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(e_1 - 2e_2) = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $f(e_1 + e_3) = 6e_1 - 4e_2 + 4e_3$. Posto $\mathcal{B} = \{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$, calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Rappresentare $f$ in termini delle coordinate $x, y$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare una base per il nucleo di $f$.*

*Svolgimento.* Poiché $f(e_1 - 2e_2) = 1(e_1 - 2e_2) + 2(e_1 + e_3)$ e $f(e_1 + e_3) = 2(e_1 - 2e_2) + 4(e_1 + e_3)$, allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. In termini di coordinate la funzione agisce nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{bmatrix}.$$

I vettori del nucleo sono quei vettori le cui coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ soddisfano l'equazione: $x + 2y = 0$. Per cui una base per il nucleo di $f$ è formata dal vettore di coordinate $(2, -1)^T$, cioè dal vettore $e_1 - 4e_2 - e_3$. ∎

**Geometria ed Algebra 1, II appello, 28 novembre 2001.**

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -4$. ■

**Esercizio 2.** *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + w = -1 \\ x + 2y + z + 2w = -1 \\ 2x + 3y + 2z + 3w = -2. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$ e $w$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 - z - w \\ y = -w. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z, w) \in \mathbf{R}^2 \to (-1 - z, -w, z, w) \in Sol(\mathcal{S}). \ ■$$

**Esercizio 3.** *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + z, x + y + z, x + 2y + z)$. *Determinare una base per* $Ker(f)$ *ed una base per* $Im(f)$. *Calcolare* $f(1, 3, -2)$. *Dire se il vettore* $(1, 4, 1, 4)$ *appartiene o non ad* $Im(f)$.

*Svolgimento.* Sostituendo si vede che $f(1, 3, -2) = (2, 5, 2, 5)$.

La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ e di $\mathbf{R}^4$ è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 1, 2)$. Mentre $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = -z \\ y = 0, \end{cases}$$

è data dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Infine, poiché $-2(1, 1, 1, 1) + 3(1, 2, 1, 2) = (1, 4, 1, 4)$, allora $(1, 4, 1, 4)$ appartiene ad $Im(f)$. ■

**Esercizio 4.** *Il vettore* $\mathbf{u}$ *ha coordinate* $(1, 1)^T$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(4, 1), (3, 1)\}$. *Calcolare le coordinate* $[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}}$ *di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base* $\mathcal{C} := \{(7, 1), (6, 1)\}$.

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Abbiamo:

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}. \ ■$$

**Esercizio 5.** *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* $P$ *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 63$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-7$ e $9$. L'autospazio $V_{-7}$ ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio $V_9$ ammette come base $(1, 1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$). ■

**Esercizio 6.** *Sia* $U$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato da* $e_1 + e_3$, $e_2 - e_4$*. Sia* $f : U \to U$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(e_1 + e_3) = e_1 + e_2 + e_3 - e_4$, $f(e_2 - e_4) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - 2e_4$*. Determinare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$*. Determinare una base di autovettori per* $f$*.*

*Svolgimento.*

Consideriamo la base $\mathcal{B} := \{e_1 - 2e_2, e_1 + e_3\}$ di $U$. Allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. In termini delle coordinate $x, y$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, il nucleo di $f$ è rappresentato dall'equazione: $x + 2y = 0$. Quindi una base per il nucleo di $f$ è data dal vettore di coordinate $(-2, 1)^T$, cioè dal vettore $-2e_1 + e_2 - 2e_3 - e_4$. Inoltre la dimensione di $Im(f)$ è 1. Quindi una base per $Im(f)$ è data dal vettore: $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$.

Infine, il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ è: $p(t) = t^2 - 3t$. Quindi lo spettro è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio $V_0$ (che altro non è che $Ker(f)$) ammette come base il vettore di coordinate $(-2, 1)^T$, mentre l'autospazio $V_3$ ammette come base il vettore di coordinate $(1, 1)^T$. Quindi una base di autovettori per $f$ è costituita dai vettori $-2e_1 + e_2 - 2e_3 - e_4$ e $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$. ■

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 5 dicembre 2001.

**Esercizio 1.** *Stabilire se l'applicazione lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *definita ponendo* $f(x, y, z) = (2x + y, 2y + z, 2z)$*, è diagonalizzabile oppure no.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è: $p_A(t) = (t - 2)^3$. Dunque abbiamo solo l' autovalore $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica $m_a(2) = 3$. D'altra parte:

$$m_g(2) = 3 - rk(A - 2I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Poiché $m_a(2) \neq m_g(2)$, allora $f$ non è diagonalizzabile. ■

**Esercizio 2.** *Sia* $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $g(1, 0) = (1, 0, -1, 1)$ *e* $g(0, 1) = (0, 1, -1, 2)$*. Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x, y, z) = (x+y, x-z)$*. Calcolare* $(g \circ f)(1, 2, 3)$*. Calcolare la matrice di* $g \circ f$ *rispetto alle basi canoniche.*

*Svolgimento.* Indichiamo con $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ ed $\mathcal{E}_4$ le basi canoniche di $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ ed $\mathbf{R}^4$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_3}(g \circ f) = M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_2}(g) \cdot M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

In particolare le coordinate di $(g \circ f)(1, 2, 3)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_4$ sono:

$$[(g \circ f)(1, 2, 3)]_{\mathcal{E}_4} = M_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{E}_3}(g \circ f) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

cioè $(g \circ f)(1, 2, 3) = (3, -2, -1, -1)$. ■

**Esercizio 3.** *Posto* $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$*, determinare una matrice invertibile* $P$ *tale che* $P^{-1}AP$ *sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t(t-1)(t-7)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0, 1 e 7. L'autospazio $V_0$ ammette come base $(2, 0, -1)$, l'autospazio $V_1$ ammette come base $(0, 1, 0)$, e l'autospazio $V_7$ ammette come base $(1, 0, 3)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato ottenuto è corretto, è sufficiente verificare che $P$ è invertibile (il che è ovvio in quanto $det(P) = 7 \neq 0$), e che $AP = PD$, dove $D$ è la matrice diagonale: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 4.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x, y, z, t, u) = (x + y + z + t + u, 2x + 2y + 2z + 2t + 2u)$, determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1, 2)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $2x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 4, ed è rappresentato dall'equazione: $x + y + z + t + u = 0$. Possiamo scegliere $y, z, t, u$ come variabili libere. Quindi $x = -y - z - t - u$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 0, 1)$. ■

**Esercizio 5.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente come base $\mathcal{B} := \{e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_4\}$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di $V$ definito ponendo $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_3 + e_4$ e $f(e_1 + e_2 - e_4) = 2(e_3 + e_4)$. Calcolare una base di $V$ costituita da autovettori per $f$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t(t + 1)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-1$ e 0. L'autospazio $V_{-1}$ ammette come base il vettore di coordinate $(1, -1)^T$, mentre $V_0$ ammette come base il vettore di coordinate $(2, -1)^T$. Quindi una base di $V$ costituita da autovettori per $f$ è: $\{e_3 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4\}$. ■

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 18 settembre 2002.

**Esercizio 1.** *Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 2t$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio $V_0$ ammette come base $(1, 1)$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $(1, -1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (una verifica diretta mostra che $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$). ■

**Esercizio 2.** *Calcolare una base per il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^3$ definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice del sistema $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U$ ha dimensione 1, si può assumere $z$ come variabile libera, e la generica soluzione di $\mathcal{S}$ è: $(-z, 0, z)$. Una base per $U$ è data dal vettore: $(1, 0, -1)$. ■

**Esercizio 3.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che abbiamo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -5$. ■

**Esercizio 4.** *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *definito ponendo:* $f(3,1,0) = (3,5,0)$, $f(2,1,0) = (2,4,0)$, $f(0,0,1) = (0,-1,1)$. *Stabilire se* $f$ *è, oppure no, diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori: $(3,1,0)$, $(2,1,0)$, $(0,0,1)$, e con $\mathcal{E}$ la base canonica. Allora la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica è:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il polinomio caratteristico di $f$ è:

$$p_f(t) = det \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & -1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} = -(t-1)^2(t-2),$$

e perciò lo spettro di $f$ è costituito dagli autovalori 1 e 2. A priori sappiamo che $m_a(2) = m_g(2) = 1$. Poi osserviamo che $m_a(1) = 2$ e $m_g(1) = 3 - rk \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$. Dunque $f$ è diagonalizzabile. ■

**Esercizio 5.** *Sia* $V$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato da* $(1,0,-1)$ *e* $(0,1,-1)$. *Sia* $U$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *rappresentato dall'equazione* $x + y - z = 0$. *Determinare una base per* $U \cap V$.

*Svolgimento.* Una rappresentazione cartesiana di $V$ si ottiene imponendo che il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{bmatrix}$ sia 2, cioè: $x + y + z = 0$. Una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data allora dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che una base per $U \cap V$ è data dal vettore: $(1,-1,0)$. ■

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 25 settembre 2002.

**Esercizio 1.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_2(-1)$, $e_{2,3}(-2)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 2.** *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + t + u = 1 \\ x + t + u = 2 \\ 5x + 2y + 2z + 5t + 5u = 8 \\ -x + 2y + 2z - t - u = -4. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^3$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$, $t$ ed $u$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z - t - u \\ -y = 1 + z. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z, t, u) \in \mathbf{R}^3 \to (2 - t - u, -1 - z, z, t, u) \in Sol(\mathcal{S}). \ \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + t)$, determinare una base per $Ker(f)$ ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* Il nucleo di $f$ è rappresentato dall'equazione: $x + y + z + t = 0$. Possiamo assumere $y$, $z$ e $t$ come variabili libere, e dunque il generico vettore di $Ker(f)$ si può mettere nella forma: $(-y - z - t, y, z, t)$. Quindi una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0, 1)$. Poi $Im(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base è data dal vettore $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dall'equazione: $x - y = 0$. $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Estendere a base di $\mathbf{R}^5$ il sistema di vettori $\mathcal{A} := \{(0, 1, 1, 1, 1), (0, 2, -1, 1, 3), (0, 3, 0, 1, 2)\}$.*

*Svolgimento.* Sia $A$ la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad $S$ le righe $e_1$ ed $e_5$, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 2, -1, 1, 3), (0, 3, 0, 1, 2), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x - y = 0$. Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo di $V$ definito ponendo $f(x, y, z) = (x + 2z, y + 2z, x + y + 4z)$. Calcolare una base di $V$ costituita da autovettori per $f$.*

*Svolgimento.* Una base per $V$ è: $\mathcal{B} := \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Poiché $f(1, 1, 0) = (1, 1, 2) = (1, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$ e $f(0, 0, 1) = (2, 2, 4) = 2(1, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$, allora la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è: $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t(t - 5)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 5. L'autospazio $V_0$ ammette come base il vettore di coordinate $(2, -1)^T$, mentre $V_5$ ammette come base il vettore di coordinate $(1, 2)^T$. Quindi una base di $V$ costituita da autovettori per $f$ è: $\{(2, 2, -1), (1, 1, 2)\}$. $\blacksquare$

**Geometria ed Algebra 1, I esonero, 17 ottobre 2002.**

**Esercizio 1.** *Si considerino i seguenti sottospazi di* $\mathbf{R}^4$*:* $U := Span((1,0,1,0),(-1,0,-1,0),(1,1,1,1))$*,* $V := Span((0,1,0,1),(0,0,0,1))$*. Calcolare una base e la dimensione per* $U$*,* $V$*,* $U \cap V$ *e* $U+V$*.*

*Svolgimento.* Poiché $U = Span((1,0,1,0),(1,1,1,1))$ ed i vettori $(1,0,1,0)$, $(1,1,1,1)$ non sono uno multiplo dell'altro, allora $dim(U) = 2$, e $\{(1,0,1,0),(1,1,1,1)\}$ è una base per $U$. Per lo stesso motivo, $dim(V) = 2$, e $\{(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$ è una base per $V$. Poi $U+V = Span((1,0,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(0,0,0,1))$. Per calcolare una base di $U+V$ andiamo a vedere se i generatori indicati sono liberi oppure no. A tale proposito, sia $(x,y,z,t)$ una relazione tra tali generatori. Allora $x(1,0,1,0)+y(1,1,1,1)+z(0,1,0,1)+t(0,0,0,1) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ y+z+t=0. \end{cases}$$

Deduciamo la relazione non banale $(1,-1,1,0)$. Dunque il generatore $(1,1,1,1)$ è sovrabbondante. Lo stesso calcolo mostra che i restanti generatori sono liberi: infatti, se $y=0$, allora $x=z=t=0$. Quindi $dim(U+V)=3$, ed una base per $U+V$ è $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(0,0,0,1)\}$. Dalla formula di Grassmann deduciamo anche che $dim(U \cap V) = 1$, e poiché $-(1,0,1,0)+(1,1,1,1) = (0,1,0,1) \in U \cap V$, una base per $U \cap V$ è costituita dal vettore $(0,1,0,1)$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare le coordinate del vettore* $(6,-2,6)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} := \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ *di* $\mathbf{R}^3$*.*

*Svolgimento.* Le coordinate $(x,y,z)^T$ si calcolano imponendo che $(6,-2,6) = x(1,1,0)+y(0,1,1)+z(1,0,1)$, cioè che:

$$\begin{cases} x+z=6 \\ x+y=-2 \\ y+z=6. \end{cases}$$

Risolvendo, si ottiene che le coordinate di $(6,-2,6)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(x,y,z)^T = (-1,-1,7)^T$. ■

**Esercizio 3.** *Il vettore* $(3,-1,2)$ *appartiene al sottospazio* $U := Span((1,1,2),(2,1,3))$ *di* $\mathbf{R}^3$*?*

*Svolgimento.* Si tratta di vedere se esistono pesi $x, y$ tali che $(3,-1,2) = x(1,1,2)+y(2,1,3)$, cioè tali che:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=-1 \\ 2x+3y=2. \end{cases}$$

Tali pesi esistono e sono $x=-5$ ed $y=4$. Dunque $(3,-1,2) \in U$. ■

**Esercizio 4.** *Determinare un sottospazio* $V$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $Span((1,0,1)) \oplus V = \mathbf{R}^3$*.*

*Svolgimento.* Aggiungendo ad $(1,0,1)$ i vettori $(0,1,0)$ ed $(0,0,1)$, si forma un sistema libero in $\mathbf{R}^3$, costituito da 3 vettori. Dunque tale sistema è una base per $\mathbf{R}^3$. Poniamo $V := Span((0,1,0),(0,0,1))$. Allora: $Span((1,0,1)) + V = Span((1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbf{R}^3$. Per provare che $Span((1,0,1)) \oplus V = \mathbf{R}^3$, resta da dimostrare che $Span((1,0,1)) \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Ma ciò segue dalla formula di Grassmann, tenuto conto che $dim(V) = 2$. ■

**Esercizio 5.** *Sia* $U$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *costituito dai vettori* $(x,y,z)$ *tali che* $x+y+z=0$*. Determinare una base per* $U$*.*

*Svolgimento.* Sia $(x,y,z)$ il generico vettore di $U$. Possiamo scrivere:

$$(x,y,z) = (-y-z,y,z) = y(-1,1,0)+z(-1,0,1).$$

Poiché i vettori $(-1,1,0)$ ed $(-1,0,1)$ appartengono ad $U$, e sono liberi, dalla precedente espressione deduciamo che essi formano una base per $U$. ■

**Esercizio 6.** *Per quali valori di* $k$ *i vettori* $(2,k)$*,* $(k,2)$ *sono linearmente indipendenti?*

*Svolgimento.* Sia $(x,y)$ una relazione tra tali vettori. Allora $x(2,k)+y(k,2) = \mathbf{0}$, cioè:

$$\begin{cases} 2x+ky=0 \\ kx+2y=0. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\frac{-k}{2}$, e sommando alla seconda equazione, deduciamo che: $(2-\frac{k^2}{2})y = 0$. Quindi, se $k \notin \{-2, 2\}$, allora $y = 0$, anche $x = 0$, ed i vettori assegnati sono liberi. È evidente che se $k \in \{-2, 2\}$ i vettori sono legati. Quindi, in conclusione, i vettori $(2, k)$, $(k, 2)$ sono linearmente indipendenti se e solo se $k \notin \{-2, 2\}$. ■

### Geometria ed Algebra 1, II esonero, 7 novembre 2002.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 3 & 14 & 13 & 20 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-3)$, $p_{2,3}$, $e_{3,2}(-2)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, $e_{4,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -(-12) = 12$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$. *Svolgere la verifica.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $p_{2,3}$, $e_3(-1)$, $e_{2,3}(-3)$, $e_{1,3}(-3)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Estendere a base di* $\mathbf{R}^5$ *il sistema di vettori* $\mathcal{A} := \{(1, 1, -1, -1, 3), (2, 2, 1, 1, 0)\}$.

*Svolgimento.* Sia $A$ la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori di $\mathcal{A}$. Eseguendo l'operazione elementare $e_{2,1}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad $S$ le righe $e_2$, $e_4$ ed $e_5$, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1, 1, -1, -1, 3), (0, 1, 0, 0, 0), (2, 2, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende $\mathcal{A}$. ■

**Esercizio 4.** *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} (k-5)x - 2y = -1 \\ 3x + ky = k-1. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Eseguendo sulla matrice completa le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(\frac{5-k}{3})$, $e_2(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 3 & k & k-1 \\ 0 & (k-2)(k-3) & (k-2)(k-4) \end{bmatrix}.$$

Quindi, se $k \notin \{2, 3\}$, allora $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(\frac{1}{k-3}, \frac{k-4}{k-3})$. Se $k = 2$ ci sono $\infty^1$ soluzioni, date da $(\frac{k-1-ky}{3}, y)$, al variare di $y \in \mathbf{R}$. Se invece $k = 3$ il sistema non è compatibile. ■

**Esercizio 5.** *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ x - y + z + t = 2 \\ 5x - y + 5z + 5t = 10 \\ x + z + t = 2. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ (e cancellando le righe nulle) si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z - t \\ y = 0. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è:

$$(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (2 - z - t, 0, z, t) \in Sol(\mathcal{S}). \ ■$$

## Geometria ed Algebra 1, III esonero, 22 novembre 2002.

**Esercizio 1.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x, y) = (x-y, 2x-2y, 3x-3y)$, determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* Il nucleo di $f$ è rappresentato dall'equazione $x - y = 0$. Dunque una base per $Ker(f)$ è data dal vettore $(1, 1)$. Anche $Im(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore: $f(1, 0) = (1, 2, 3)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dal sistema: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$. ■

**Esercizio 2.** *Dato l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito ponendo $f(x, y) = (10x - 4y, 24x - 10y)$, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice rappresentativa di $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ sia diagonale.*

*Svolgimento.* La matrice di $f$ rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 24 & -10 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 4$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-2$ e $2$. L'autospazio $V_{-2}$ ammette come base $(1, 3)$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $(1, 2)$. La base cercata è: $\{(1, 3), (1, 2)\}$. ■

**Esercizio 3.** *Il vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{R}^2$ ha coordinate $(x, y)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1, 4), (1, 5)\}$. Quali sono le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' := \{(2, 1), (3, 2)\}$?*

*Svolgimento.* Siano $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'}$ le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, ed $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -13 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10x - 13y \\ 7x + 9y \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dall'equazione $x+y+z+t=0$. Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$. Determinare una base di $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Una rappresentazione cartesiana di $V$ è data dall'equazione $x-y-z-t=0$. Quindi, per determinare una base di $U \cap V$ è sufficiente andare a risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z-t=0 \end{cases}$. Riducendo a scala, si perviene al sistema lineare equivalente: $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0 \end{cases}$. Quindi ci sono $\infty^2$ soluzioni (cioè $dim(U \cap V)=2$), possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di $U \cap V$ è: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (0, -z-t, z, t) \in U \cap V$. Deduciamo che una base per $U \cap V$ è costituita dai vettori: $\rho(1,0)$, $\rho(0,1)$, cioè dai vettori: $(0,-1,1,0)$, $(0,-1,0,1)$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Quali sono i valori del parametro $k$ per cui la seguente matrice $A_k$ non è diagonalizzabile?*

$$A_k := \begin{bmatrix} 1 & k-3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A_k$ è: $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dall'autovalore 1, che ha sempre molteplicità algebrica 2. Invece, per quanto riguarda la molteplicità geometrica, osserviamo che:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 0 & k-3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} == \begin{cases} 2 & \text{se } k=3 \\ 1 & \text{se } k \neq 3. \end{cases}$$

In conclusione, la matrice $A_k$ non è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 3$. $\blacksquare$

**Esercizio 6.** *Sia $V$ lo spazio delle matrici $2 \times 2$. Sia $f : V \to V$ l'applicazione che ad ogni matrice $M \in V$ associa $f(M) := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot M$. Provare che $f$ è lineare. Calcolare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{E} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Dire se $f$ è, oppure no, diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Il fatto che $f$ sia lineare, segue dalle proprietà di calcolo della moltiplicazione tra matrici.

Per calcolare la matrice rappresentativa, osserviamo che: $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Infine, il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = t^2(t-5)^2$. Poiché $m_a(0) = m_g(0) = 2$, e $m_a(5) = m_g(5) = 2$, possiamo dire che $f$ è diagonalizzabile. $\blacksquare$

## Geometria ed Algebra 1, II appello, 28 novembre 2002.

**Esercizio 1.** *Il vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{R}^2$ ha coordinate $(x,y)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1,6),(1,5)\}$. Calcolare le coordinate $(x',y')^T$ di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' := \{(-1,6),(-1,5)\}$.*

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Allora abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11x+10y \\ -12x-11y \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 2.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x+y+z, -x-y-z)$, determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1, -1)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $x + y = 0$. Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dall'equazione: $x + y + z = 0$. Possiamo scegliere $y, z$ come variabili libere. Quindi $x = -y - z$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Dato l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito ponendo $f(x, y) = (-35x-30y, 36x+31y)$, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia diagonale.*

*Svolgimento.* La matrice di $f$ rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} -35 & -30 \\ 36 & 31 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 + 4t - 5$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-5$ e $1$. L'autospazio $V_{-5}$ ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio $V_1$ ammette come base $(-5, 6)$. La base cercata è: $\{(1, -1), (-5, 6)\}$. $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-2)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito due scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = 10$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Calcolare una base per il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 2z + 2t = 0 \\ 3x + y + 4z + 4t = 0 \\ 5x + y + 7z + 7t = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala $\mathcal{S}$, si perviene al seguente sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2y - z - t = 0. \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{S}$ ammette $\infty^2$ soluzioni (cioè $U$ ha dimensione 2), possiamo assumere come variabili libere $z, t$, ed una rappresentazione parametrica per $U$ è data dalla funzione: $\rho : (z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{3(z+t)}{2}, \frac{z+t}{2}, z, t) \in U$. Allora una base per $U$ è data dai vettori: $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$. $\blacksquare$

**Esercizio 6.** *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni: $f(1, 2, 2) = (0, 10, 0)$, $f(1, -1, 0) = (-12, -5, -36)$, $f(1, 1, 1) = (-6, 5, -18)$. Qual è la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$? Dire se $f$ è, oppure no, diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $(1, 2, 2), (1, -1, 0), (1, 1, 1)$. Sappiamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -6 \\ 10 & -5 & 5 \\ 0 & -36 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ -36 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Infine, poiché il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t(t-5)(t-6)$, allora $f$ ha tutti gli autovalori con molteplicità algebrica 1. Quindi possiamo dire che $f$ è diagonalizzabile. $\blacksquare$

**Geometria ed Algebra 1, III appello, 4 dicembre 2002.**

**Esercizio 1.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x,y,z,t) = (x+z, 3x+3z)$, determinare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1,3)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $3x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 3, ed è rappresentato dall'equazione: $x + z = 0$. Possiamo scegliere $y, z, t$ come variabili libere. Quindi $x = -z$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,0,1)$. ■

**Esercizio 2.** *Fare un esempio di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ il cui nucleo sia generato dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(1,0,1,0)$.*

*Svolgimento.* Sia $U := Span((1,1,1,1),(1,0,1,0))$. Una rappresentazione cartesiana di $U$ è data dal sistema: $\begin{cases} x+y-z-t=0 \\ y-t=0 \end{cases}$. Allora un' applicazione lineare che soddisfa le condizioni richieste è la funzione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo: $f(x,y,z,t) := (x+y-z-t, y-t)$. ■

**Esercizio 3.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(1,0,-1,-1)$. Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dal sistema lineare $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$. Stabilire se il vettore $\mathbf{w} := (-1,-1,1,1)$ appartiene o no ad $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Poiché le coordinate di $\mathbf{w}$ soddisfano le equazioni di $U$, allora $\mathbf{w} \in U$. Tuttavia il vettore $\mathbf{w}$ non si può scrivere come combinazione lineare di $(1,1,1,1)$ e $(1,0,-1,-1)$ (infatti l'equazione $(-1,-1,1,1) = x(1,1,1,1) + y(1,0,-1,-1)$ non ammette soluzioni). Quindi $\mathbf{w} \notin V$, e, a maggior ragione, $\mathbf{w} \notin U \cap V$. ■

**Esercizio 4.** *Dato l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = (14x - 4y, 48x - 14y)$, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^2$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* La matrice di $f$ rispetto alla base canonica è $A := \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 48 & -14 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 4$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-2$ e $2$. L'autospazio $V_{-2}$ ammette come base $(1,4)$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $(1,3)$. La base cercata è: $\mathcal{B} := \{(1,4),(1,3)\}$. ■

**Esercizio 5.** *Posto $A := \begin{bmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -cos\,\alpha \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che se $\alpha$ è un multiplo intero di $\pi$, allora la matrice $A$ è diagonale, ed in tal caso si può porre $P = I$. Pertanto da ora in poi possiamo assumere che $\alpha$ non sia un multiplo intero di $\pi$.

Ciò premesso, osserviamo che il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 1$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-1$ e $1$. L'autospazio $V_{-1}$ ammette come base $(-sen\,\alpha, 1 + cos\,\alpha)$ (qui interviene l'ipotesi che $\alpha$ non è un multiplo intero di $\pi$), mentre l'autospazio $V_1$ ammette come base $(-sen\,\alpha, -1 + cos\,\alpha)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} -sen\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 1 + cos\,\alpha & -1 + cos\,\alpha \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 6.** *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore definito ponendo $f(x,y,z) = (4x + y - 2z, -4x + 2z, 14x + 2y - 7z)$. Stabilire se $f$ è oppure no diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t^2(t-3)$. Inoltre il rango della matrice rappresentativa $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \\ 14 & 2 & -7 \end{bmatrix}$ è 2, quindi $m_g(0) = 1 \neq m_a(0) = 2$, ed $f$ non è diagonalizzabile. ■

**Geometria ed Algebra 1, appello straordinario, 7 maggio 2003.**

**Esercizio 1.** *Sia $A$ la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcolare gli autovalori di $A$, una base per ciascun autospazio, ed una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -(t+1)(t-1)(t-3)$. Quindi gli autovalori di $A$ son $-1, 1, 3$. L'autospazio $V_{-1}$ ammette come base $(1,0,-1)$, l'autospazio $V_1$ ammette come base $(0,1,0)$, e l'autospazio $V_3$ ammette come base $(1,0,1)$. La matrice cercata è: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} (2+k)x + 5y = 1 \\ x + (3+k)y = 1 \\ 3x + 8y = 2 + k. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice completa di $\mathcal{S}$ ha determinante pari a $k^2(k+7)$. Quindi, se $k \notin \{0, -7\}$, il sistema assegnato non è compatibile. Se $k = 0$, $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(-2, 1)$. Se $k = -7$, $\mathcal{S}$ ammette un'unica soluzione data da $(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$. ■

**Esercizio 3.** *Provare che il vettore $(2,-2,-6)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,1,-1)$ e $(1,2,0)$. Quali sono le coordinate di $(2,-2,-6)$ rispetto a $(1,1,-1)$ e $(1,2,0)$?*

*Svolgimento.* Poiché $(2,-2,-6) = 6(1,1,-1) - 4(1,2,0)$, allora possiamo dire che $(2,-2,-6)$ appartiene al sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,1,-1)$ e $(1,2,0)$, e le coordinate cercate sono $(6,-4)^T$. ■

**Esercizio 4.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z,t) = (x+t, x+y-z, x+t)$, calcolare una base per il nucleo, una per l'immagine, e calcolare una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, una base è costituita dai vettori $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione: $x - z = 0$. Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dal sistema: $\begin{cases} x + t = 0 \\ y - z - t = 0 \end{cases}$. Possiamo scegliere $z, t$ come variabili libere. Quindi $y = z + t$ e $x = -t$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(0,1,1,0)$, $(-1,1,0,1)$. ■

**Esercizio 5.** *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ trasforma il vettore $(2,1)$ in $(a,b)$, ed il vettore $(5,3)$ in $(c,d)$. Qual è la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica?*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base $\{(2,1),(5,3)\}$. Allora abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a - c & -5a + 2c \\ 3b - d & -5b + 2d \end{bmatrix}. \ ■$$

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 17 settembre 2003.

**Esercizio 1.** *Il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ ha la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \\ 3x + 2t = 0. \end{cases}$$

*Calcolare una base di $U$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala, si perviene alla seguente rappresentazione cartesiana di $U$:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3y - 3z - t = 0. \end{cases}$$

Quindi $U$ ha dimensione 2, possiamo assumere $z, t$ come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di $U$ è data dalla funzione: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{2}{3}t, -z - \frac{t}{3}, z, t) \in U$. Una base per $U$ è data dai vettori $\rho(1,0)$, $\rho(0,1)$, cioè dai vettori $(0,-1,1,0)$, $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$. ■

**Esercizio 2.** *Il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ è generato dai vettori $(0,1,0,-1)$ e $(1,0,1,0)$. Il sottospazio $V$ ha rappresentazione cartesiana data dal sistema:* $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x-y-z-t=0 \end{cases}$. *Calcolare una base per $U+V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema che rappresenta $V$, troviamo che $V$ ha base data dai vettori: $(2,1,3,0), (0,-1,0,1)$. Quindi $U+V$ è generato dai vettori $(0,1,0,-1)$, $(1,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$ e $(0,-1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si vede che $(0,1,0,-1)$, $(1,0,1,0)$, $(2,1,3,0)$ formano una base per $U+V$. ■

**Esercizio 3.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(2)$, $e_1(-1)$, $p_{2,3}$, $e_2(-1)$, $e_{3,2}(-3)$, $e_3(\frac{1}{8})$, $e_{2,3}(1)$, $e_{1,3}(1)$, $e_{1,2}(1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 4.** *Sia $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo: $f(x,y,z,t,u) = (x+y+z+t+u, y+z+t+u, y+z+t+u)$. Determinare una base per $Im(f)$ ed una base per $Ker(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, ed una sua base è costituita dai vettori $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$. Il nucleo è rappresentato dal sistema: $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \end{cases}$. Possiamo scegliere $z, t, u$ come variabili libere. Quindi $x=0$ e $y=-z-t-u$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(0,-1,1,0,0)$, $(0,-1,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,1)$. ■

**Esercizio 5.** *Determinare una base che diagonalizzi l'operatore: $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo: $f(x,y,z) = (-x, -4x-4y+z, -16x-12y+3z)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica è: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \\ -16 & -12 & 3 \end{bmatrix}$. Il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t(t+1)^2$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-1$ e $0$. L'autospazio $V_{-1}$ ha per base $(-3,4,0)$, $(0,1,3)$. L'autospazio $V_0$ ha base data dal vettore $(0,1,4)$. Quindi una base che diagonalizza $f$ è data dai vettori: $(-3,4,0)$, $(0,1,3)$, $(0,1,4)$. ■

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 24 settembre 2003.

**Esercizio 1.** *Il sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^5$ è generato dai vettori $(1,1,1,1,1)$ e $(2,2,2,5,-1)$. Il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^5$ ha rappresentazione cartesiana data dal sistema:* $\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \end{cases}$. *Calcolare una base per $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Una rappresentazione cartesiana di $V$ è data dal sistema: $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ 2x-t-u=0 \end{cases}$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data dal sistema che si ottiene considerando sia le equazioni che definiscono $U$ che quelle che definiscono $V$. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap V$:

$$\begin{cases} x+y+z+t+u=0 \\ y+z+t+u=0 \\ z+t+u=0 \\ t+u=0. \end{cases}$$

Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è data dal vettore: $(0,0,0,1,-1)$. ∎

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S}_k := \begin{cases} kx+2y=k \\ 2x+ky=4-k. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Il determinante della matrice incompleta di $\mathcal{S}_k$ è $k^2-4$. Quindi, se $k \notin \{-2,2\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione, che è data da: $(\frac{k+4}{k+2}, \frac{k-2}{k+2})$. Se $k=-2$, il sistema $\mathcal{S}_{-2}$ non è compatibile. Se $k=2$, il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette $\infty^1$ soluzioni, date da: $(1-t,t)$, $t \in \mathbf{R}$. ∎

**Esercizio 3.** *Calcolare una base per il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^5$ generato dai vettori* $(1,2,3,4,5)$, $(2,1,1,1,3)$, $(3,3,4,5,8)$, $(1,-1,-2,-3,-2)$, $(4,5,7,9,13)$.

*Svolgimento.* Mettendo in riga i vettori assegnati, e riducendo a scala per righe, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per $U$ è: $\{(1,2,3,4,5),(0,-3,-5,-7,-7)\}$. ∎

**Esercizio 4.** *Sia $V$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq 3$. Sia $f: V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ associa il polinomio $q(t)=a_1+2a_2t+3a_3t^2$. Sia $\mathcal{B}$ la base di $V$ costituita dai polinomi $1$, $1+t$, $t^2$, $t^3$. Calcolare la matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

*Svolgimento.* Abbiamo: $f(1)=0$, $f(1+t)=1$, $f(t^2)=2t\,(=-2+2(1+t))$, $f(t^3)=3t^2$. Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t)=-t^2(t-3)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio $V_0$ ammette come base $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, mentre l'autospazio $V_3$ ammette come base $(1,1,1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. ∎

## Geometria ed Algebra 1, I esonero, 27 ottobre 2003.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $p_{4,5}$, $e_{5,4}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 3$. ■

**Esercizio 2.** *Estendere a base di* $\mathbf{R}^5$ *il sistema di vettori* $\{(1,1,1,3,4),(1,1,0,2,3),(1,0,0,0,0),(-1,1,0,1,3)\}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, sulla matrice ottenuta mettendo in riga i vettori assegnati, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(1)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad $S$ la riga $e_5$, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,1,1,3,4),(1,1,0,2,3),(1,0,0,0,0),(-1,1,0,1,3),(0,0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$ che estende il sistema di vettori assegnato. ■

**Esercizio 3.** *Dati i sottospazi* $U := Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0))$ *e* $W := Span((1,3,0,-1),(2,4,1,0),(3,7,1,-1))$ *di* $\mathbf{R}^4$*, calcolare una base e la dimensione per* $U$*,* $W$*,* $U+W$ *e* $U \cap W$*.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che, poiché i due generatori di $U$ non sono uno multiplo dell'altro, essi formano una base di $U$, ed $U$ ha perciò dimensione 2.

Poi, tenuto conto che $(3,7,1,-1) = (1,3,0,-1) + (2,4,1,0)$, segue che $W = Span((1,3,0,-1),(2,4,1,0))$, e, per lo stesso motivo di prima, $(1,3,0,-1),(2,4,1,0)$ formano una base per $W$, e $dim(W) = 2$.

Sappiamo che $U+W = Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0),(1,3,0,-1),(2,4,1,0))$. Per calcolarne la dimensione andiamo a vedere se i quattro generatori sono legati oppure no, cioè se essi ammettono, oppure no, una relazione non banale. A tale proposito, sia $(x,y,z,t)$ una qualunque relazione tra i generatori di $U+W$. Allora si ha: $x(1,2,0,1) + y(0,1,-1,0) + z(1,3,0,-1) + t(2,4,1,0) = \mathbf{0}$, cioè si ha il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x + z + 2t = 0 \\ 2x + y + 3z + 4t = 0 \\ -y + t = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ammette come soluzione non banale $(x,y,z,t) = (1,-1,1,-1)$. Ciò significa che:

$$(*) \qquad (1,2,0,1) - (0,1,-1,0) + (1,3,0,-1) - (2,4,1,0) = \mathbf{0},$$

cioè i quattro generatori sono legati. In particolare vediamo che $(2,4,1,0)$ è sovrabbondante. Dunque:

$$U + W = Span((1,2,0,1),(0,1,-1,0),(1,3,0,-1)).$$

Lo stesso calcolo precedente mostra che i tre generatori restanti sono liberi (infatti se $t = 0$ allora $x = y = z = 0$). Essi dunque formano una base per $U+W$, e $dim(U+W) = 3$.

Per la formula di Grassmann sappiamo che $dim(U \cap W) = 1$, e da (*) deduciamo che una base per $U \cap W$ è formata dal vettore $(1,1,1,1)$. ■

**Esercizio 4.** *Dare la definizione di rango di una matrice. Inoltre, al variare del parametro $k$, calcolare il rango della matrice* $A_k := \begin{bmatrix} 3 & 6 & k+7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & k+2 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Data una matrice $A$, si definisce rango per righe di $A$, la dimensione dello spazio generato dalle righe di $A$. Analogamente, si definisce rango per colonne di $A$, la dimensione dello spazio generato dalle colonne $A$. Il Teorema del rango afferma che il rango per righe coincide con il rango per colonne. Tale numero si chiama il rango di $A$.

Veniamo ora al nostro esempio. Poiché il determinante di $A_k$ è: $det(A_k) = k(k+1)$, allora, se $k \notin \{-1, 0\}$, il rango di $A_k = 3$. Invece il rango di $A_0$ e di $A_{-1}$ è 2. ■

**Esercizio 5.** *Provare che se i vettori* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente indipendenti, allora anche* $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ *sono linearmente indipendenti.*

*Svolgimento.* Sia $(x, y, z)$ una relazione per i vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$. Allora abbiamo: $x(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})+y(\mathbf{v}+\mathbf{w})+z\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Cioè: $x\mathbf{u}+(x+y)\mathbf{v}+(x+y+z)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Ma i vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. Dunque deve essere:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ma ciò implica $x = y = z = 0$. Quindi abbiamo provato che una qualunque relazione tra i vettori $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ deve essere banale. Ciò significa proprio che $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti. ■

**Esercizio 5.** *Sia* $X := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a = b = c = d \right\}$. *Provare che* $X$ *è un sottospazio di* $\mathcal{M}(2,2)$, *e calcolarne una base.*

*Svolgimento.* Osserviamo che $X = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbf{R} \right\}$. Quindi $X = Span\left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$. Ciò prova che $X$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e che $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ne costituisce una base. ■

## Geometria ed Algebra 1, II esonero, 21 novembre 2003.

**Esercizio 1.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *e verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,1}(-1)$, $e_{3,2}(1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 2.** *Sia* $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo* $f(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 3y + 5z + 9t, 2x + y + 5z + 8t)$. *Calcolare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$, *ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$. *Dire se il vettore* $(0, 4, 3)$ *appartiene o no ad* $Im(f)$.

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, e come base $(1,1,2)$, $(-1,3,1)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $5x+3y-4z=0$. Poiché il vettore $(0,4,3)$ soddisfa tale equazione, possiamo dire che $(0,4,3)$ appartiene ad $Im(f)$.

Anche $Ker(f)$ ha dimensione 2, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema lineare:

$$\begin{cases} x-y=-z-t \\ y=-z-2t, \end{cases}$$

è data dai vettori $(-2,-1,1,0)$, $(-3,-2,0,1)$. ■

**Esercizio 3.** *Sia $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(e_1+e_3) = 2(e_1+e_2+e_3)$, $f(e_1+e_2) = f(e_1+e_3)$, e $f(e_2) = e_1+e_2+e_3$. Qual è la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$?*

*Svolgimento.* Tenuto conto che $f$ è lineare, dai dati deduciamo che:

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_3)=2(e_1+e_2+e_3) \\ f(e_1)+f(e_2)=2(e_1+e_2+e_3) \\ f(e_2)=e_1+e_2+e_3. \end{cases}$$

Interpretando $f(e_1)$, $f(e_2)$ ed $f(e_3)$ come delle incognite, possiamo calcolarne il valore eseguendo operazioni elementari sulle formule precedenti. Si ottiene che $f(e_1)=f(e_2)=f(e_3)=e_1+e_2+e_3$. Quindi la matrice cercata è:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tale che $D = P^{-1}AP$, dove $A := \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ -8 & -13 \end{bmatrix}$.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = (t+5)(t-3)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-5$ e 3. L'autospazio $V_{-5}$ ammette come base $(1,-1)$, mentre l'autospazio $V_3$ ammette come base $(-2,1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 5.** *Per quali valori del parametro $k$ la seguente matrice $A_k$ è diagonalizzabile?*

$$A_k := \begin{bmatrix} -k-4 & k+5 \\ -k-5 & k+6 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A_k$ è: $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dall'autovalore 1, che ha sempre molteplicità algebrica 2. Invece, per quanto riguarda la molteplicità geometrica, osserviamo che:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} -k-5 & k+5 \\ -k-5 & k+5 \end{bmatrix} = 2 - rk \begin{bmatrix} -k-5 & k+5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } k=-5 \\ 1 & \text{se } k \neq -5. \end{cases}$$

In conclusione, la matrice $A_k$ è diagonalizzabile se e solo se $k=-5$. ■

## Geometria ed Algebra 1, II appello, 27 novembre 2003.

**Esercizio 1.** *Si consideri il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$, $U := Span((1,1,1,1),(2,1,1,1),(5,1,1,1))$. Determinare un sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che una base di $U$ è costituita dai vettori $(1,1,1,1),(0,1,1,1)$. Aggiungendo a tali vettori i vettori canonici $e_3$, $e_4$ si ottiene una base di $\mathbf{R}^4$. Allora il sottospazio cercato è $V := Span(e_3, e_4)$. ■

**Esercizio 2.** *Sia $W$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dall'equazione: $2x - y - z + w = 0$. Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori: $(1,-1,0,0),(2,-1,-1,0),(2,-2,1,-1)$. Calcolare una base per $U \cap W$.*

*Svolgimento.* Una rappresentazione cartesiana di $U$ è data dall'equazione: $x+y+z+w=0$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U \cap W$ è data dal sistema che si ottiene considerando sia l' equazione che definisce $U$ che quella che definisce $W$. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap W$:

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ 3y+3z+w=0. \end{cases}$$

Per ottenere una base di $U \cap W$ andiamo a risolvere tale sistema. Possiamo assumere $z$ e $w$ come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica di $U \cap W$ è data dalla funzione: $(z,w) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{2w}{3}, -z - \frac{w}{3}, z, w) \in U \cap W$. Una base di $U \cap W$ si ottiene in corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè una base di $U \cap W$ è costituita dai vettori: $(0,-1,1,0)$, $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1)$. ■

**Esercizio 3.** *Determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tale che $D = P^{-1}AP$, dove* $A := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -t^2(t+1)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-1$ e $0$. L'autospazio $V_{-1}$ ammette come base $(1,1,1)$, mentre l'autospazio $V_0$ ammette come base $(1,-1,0),(0,3,2)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 4.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definita ponendo $f(x,y,z,t) = (x-y+z-t, 6x-6y+6z-6t)$, calcolare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, e come base $(1,6)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $6x - y = 0$. Per il Teorema della dimensione, possiamo dire che $Ker(f)$ ha dimensione 3, ed una sua base, ottenuta risolvendo l'equazione $x - y + z - t = 0$, è data dai vettori $(1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$. ■

**Esercizio 5.** *Il vettore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{R}^2$ ha coordinate $(5,-4)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(2,2),(2,3)\}$. Quali sono le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' := \{(1,1),(5,6)\}$?*

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^2$, e denotiamo con $(x', y')^T$ le coordinate di $\mathbf{u}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Allora abbiamo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot [\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}'}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -4 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 4 dicembre 2003.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 11 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,5}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -7$. ■

**Esercizio 2.** *Determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tale che $D = P^{-1}AP$, dove $A := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -8 \end{bmatrix}$.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = (t+5)(t+4)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-5$ e $-4$. L'autospazio $V_{-5}$ ammette come base $(-1,1)$, mentre l'autospazio $V_{-4}$ ammette come base $(4,-3)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 3.** *Per l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo $f(x,y) = (2x+3y, 2x+3y, -4x-6y)$, calcolare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, e come base $(2,2,-4)$. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dal sistema lineare: $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. Infine $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo l'equazione $2x + 3y = 0$, è data dal vettore $(-3,2)$. ■

**Esercizio 4.** *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo definito dall'equazione $x + y + z = 0$. Inoltre si ha che $f(0,1,0) = (0,-9,0)$. Determinare una matrice diagonale $D$ ed una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ tali che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D$.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che il nucleo di $f$ ha base data dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$. Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ costituita da $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ e $(0,1,0)$. Allora $\mathcal{B}$ è la base cercata. Infatti:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}. \ ■$$

**Esercizio 5.** *Si consideri la base $\mathcal{B} := \{1, x, x^2, x^3\}$ per lo spazio dei polinomi $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 3}$. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(x)$ associa il polinomio $p(x) + p'(x) + p''(x) + p'''(x)$. Calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, la dimensione di $Ker(f)$ e la dimensione di $Im(f)$.*

*Svolgimento.* Osserviamo che $f(1) = 1$, $f(x) = 1 + x$, $f(x^2) = 2 + 2x + x^2$, $f(x^3) = 6 + 6x + 3x^2 + x^3$. Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

In particolare $dim(Im(f)) = 4$, e $dim(Ker(f)) = 0$. ■

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 23 settembre 2004.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,-1)$, $(3,2,3,1)$, e sia $V$ il sottospazio generato da $(1,-1,-1,1)$, $(3,-1,-1,3)$. Calcolare $dim(U+V)$, $dim(U \cap V)$, e calcolare una base per $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si vede che $U$ ammette come base i vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,2)$. Osserviamo anche che $(1,-1,-1,1)$, $(3,-1,-1,3)$ formano una base per $V$. Mettendo insieme questi 4 vettori, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$. E disponendoli in riga, e riducendo a scala, vediamo che una base per $U+V$ è data dai vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,2)$, $(0,1,1,0)$. Per cui $dim(U+V)=3$, e per la formula di Grassmann, $dim(U\cap V)=1$.

Per calcolare una base di $U\cap V$, andiamo alla ricerca di pesi $x,y,z,w$ tali che:

$$(*) \qquad x(1,1,1,1)+y(0,1,0,2)=z(1,-1,-1,1)+w(3,-1,-1,3),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x-z-3w=0 \\ x+y+z+w=0 \\ x+z+w=0 \\ x+2y-z-3w=0 \end{cases}$$

(si osservi che il vettore rappresentato dall'uguaglianza $(^*)$ rappresenta il generico vettore di $U\cap V$). Una soluzione non banale di tale sistema è $(x,y,z,w)=(1,0,-2,1)$. In corrispondenza di tali pesi, otteniamo da $(^*)$ che un vettore non nullo appartenente ad $U\cap V$ è $(1,1,1,1)$, che pertanto forma una base per $U\cap V$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare il determinante della matrice* $A:=\begin{bmatrix} 8 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{4,1}(-8)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-2)$, $e_{4,3}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A)=-det(S)=-1$. ■

**Esercizio 3.** *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S}:=\begin{cases} x-y-z-t=1 \\ 2x+y+z+t=0 \\ 4x-y-z-t=2. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x-y=z+t+1 \\ 3y=-3z-3t-2. \end{cases}$$

In conclusione, una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare $\mathcal{S}$ è data dall'applicazione:

$$(z,t)\in\mathbf{R}^2\to(\frac{1}{3},-z-t-\frac{2}{3},z,t)\in Sol(\mathcal{S}).\ ■$$

**Esercizio 4.** *Determinare una matrice diagonale* $D$ *ed una matrice invertibile* $P$ *tale che* $D=P^{-1}AP$, *dove* $A:=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t)=-t^2(t-2)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio $V_0$ ammette come base $\{(1,0,0),(0,1,-1)\}$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $\{(1,1,1)\}$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, è sufficiente osservare che $P$ è invertibile (infatti $det(P) = 2 \neq 0$), e che $PD = AP$, cioè che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Si consideri la base $\mathcal{B} := \{1+x, 1+2x\}$ per lo spazio dei polinomi $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(x)$ associa la sua derivata. Determinare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

*Svolgimento.* Osserviamo che $f(1+x) = 1$, e che $f(1+2x) = 2$. D'altra parte $1 = 2(1+x) - (1+2x)$, e $2 = 4(1+x) - 2(1+2x)$. Per cui $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. $\blacksquare$

**Geometria ed Algebra 1, V appello, 30 settembre 2004.**

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$. Stabilire se il vettore $(2,2,-4)$ appartiene o non ad $U$.*

*Svolgimento.* Si tratta di vedere se esistono pesi $x, y$ tali che $(2,2,-4) = x(1,-1,0) + y(0,1,-1)$. Ciò accade per $x = 2$ ed $y = 4$. Quindi il vettore $(2,2,-4)$ appartiene ad $U$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, e verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-3)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,-1,1,0)$ e $(0,-1,0,1)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per $U$.*

*Svolgimento.* Mettiamo in colonna i vettori assegnati, e affianchiamo la colonna $(x,y,z,t)^T$ che rappresenta il generico vettore di $\mathbf{R}^4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ -1 & -1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala, otteniamo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & y+z \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y+z+t \end{bmatrix}.$$

Il vettore $(x, y, z, t)^T$ appartiene ad $U$ se e solo se tale matrice ha rango pari alla dimensione di $U$, che è 2. Ma tale matrice ha rango 2 se e solo se:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + t = 0. \end{cases}$$

Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U$. ■

**Esercizio 4.** *Determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tale che $D = P^{-1}AP$, dove* $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -t^2(t-3)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 3. L'autospazio $V_0$ ammette come base $\{(0,1,0),(2,0,-1)\}$, mentre l'autospazio $V_3$ ammette come base $\{(1,1,1)\}$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, è sufficiente osservare che $P$ è invertibile (infatti $det(P) = -3 \neq 0$), e che $PD = AP$, cioè che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *Sia $U := \mathbf{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio dei polinomi di grado al piú 2, e $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$ lo spazio dei polinomi di grado al piú 1. Fissiamo la base $\mathcal{B} = \{1, x, x + x^2\}$ per $U$, e la base $\mathcal{E} = \{1, x\}$ per $V$. Sia $f : U \to V$ l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Calcolare una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $(b_0, b_1, b_2)^T$ le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Allora, in termini di coordinate, la funzione $f$ agisce nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_0 + b_1 + b_2 \\ -b_0 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}.$$

Quindi il nucleo di $f$ è descritto dall'equazione: $b_0 + b_1 + b_2 = 0$. Tale equazione ammette $\infty^2$ soluzioni, generate da $(1,-1,0)$ e $(1,0,-1)$. Tali coordinate corrispondono ai vettori $1 - x$, e $1 - x - x^2$, che formano una base per $Ker(f)$. Per il Teorema della dimensione sappiamo che $dim(Im(f)) = 1$. Dunque una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore di coordinate $(1,-1)^T$, cioè una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore $1 - x$. ■

## Geometria ed Algebra 1, I esonero, 4 novembre 2004.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -15 \\ 1 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito due scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -5$. ■

**Esercizio 2.** *In quanti modi si può esprimere $(1,3,-2)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(1,0,1)$? E il vettore $(1,3,2)$?*

*Svolgimento.* Dire che il vettore $(1,3,-2)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, significa dire che esistono pesi $x,y$ tali che $(1,3,-2)=x(1,1,0)+y(1,0,1)$. Ciò equivale a dire che esistono pesi $x,y$ tali che:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=3 \\ y=-2. \end{cases}$$

Deduciamo che esistono pesi $x,y$ per esprimere $(1,3,-2)$ come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, e tali pesi sono univocamente determinati: deve essere $x=3$ ed $y=-2$. Questo significa proprio che il vettore $(1,3,-2)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ in un sol modo.

Studiando il vettore $(1,3,2)$ invece si perviene alle condizioni:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x=3 \\ y=2. \end{cases}$$

In questo caso il sistema non ammette soluzioni, e dunque il vettore $(1,3,2)$ non si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ in nessun modo. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,0,-1)$, $(3,-1,-2)$, $(0,1,-1)$. Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$, $(2,2,4)$. Calcolare dimensione e base per $U$, $V$, $U+V$, $U\cap V$.*

*Svolgimento.* Per calcolare una base e la dimensione di $U$, andiamo a vedere se i generatori assegnati sono liberi oppure no. A tale proposito, sia $(x,y,z)$ una relazione tra di essi. Deve essere: $x(1,0,-1)+y(3,-1,-2)+z(0,1,-1)=\mathbf{0}$. Cioè:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ -y+z=0 \\ -x-2y-z=0. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è data da $(3,-1,-1)$. Quindi il generatore $(0,1,-1)$ è sovrabbondante, e si ha: $U=Span((1,0,-1),(3,-1,-2))$. Poiché $(1,0,-1)$ e $(3,-1,-2)$ sono linearmente indipendenti, allora $dim(U)=2$, ed una base per $U$ è costituita dai vettori $(1,0,-1)$, $(3,-1,-2)$.

Un'analisi analoga prova che $dim(V)=2$, ed una base per $V$ è costituita dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,1)$.

Poiché $U=Span((1,0,-1),(3,-1,-2))$ e $V=Span((1,-1,0),(1,0,1))$, allora $U+V$ è generato dai vettori $(1,0,-1),(3,-1,-2),(1,-1,0),(1,0,1)$. Come prima, per calcolare una base e la dimensione di $U+V$, andiamo a vedere se tali generatori sono liberi oppure no. Con un calcolo analogo a quello precedente, si vede che $(3,-1,-2)$ è sovrabbondante, che $U+V=Span((1,0,-1),(1,-1,0),(1,0,1))$, e che tali generatori sono liberi. Dunque $dim(U+V)=3$ (e perciò $U+V=\mathbf{R}^3$), ed una base per $U+V$ è: $\{(1,0,-1),(1,-1,0),(1,0,1)\}$.

Infine, dalla formula di Grassmann sappiamo che $dim(U\cap V)=1$. Quindi per trovare una base di $U\cap V$, è sufficiente trovare un vettore non nullo di $U\cap V$. A tale proposito, sia $\mathbf{w}$ un vettore appartenente sia ad $U$ che a $V$. Allora esistono pesi $(x,y,z,t)$ tali che:

$$\mathbf{w}=x(1,0,-1)+y(3,-1,-2)=z(1,-1,0)+t(1,0,1).$$

L'equazione precedente conduce al sistema lineare:

$$\begin{cases} x+3y=z+t \\ -y=-z \\ -x-2y=t. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è: $(-2,1,1,0)$. Quindi una base per $U\cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w}:=(1,-1,0)$. $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Provare che: $Span((1,2,3),(1,-1,2))=Span((0,-3,-1),(3,3,8))$.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $S=\{(1,2,3),(1,-1,2)\}$, e con $T=\{(0,-3,-1),(3,3,8)\}$. Vogliamo provare che $Span(S)=Span(T)$.

Cominciamo con il provare che $S\subseteq Span(T)$. Ciò si prova trovando pesi $x,y,z,t$ per cui: $(1,2,3)=x(0,-3,-1)+y(3,3,8)$ e $(1,-1,2)=z(0,-3,-1)+t(3,3,8)$. Tali pesi esistono: basta porre $(x,y,z,t)=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. Ciò dimostra che $S\subseteq Span(T)$, da cui segue che $Span(S)\subseteq Span(Span(T))=Span(T)$.

In maniera analoga si vede che $Span(T)\subseteq Span(S)$.

Ma se $Span(S)\subseteq Span(T)$ e $Span(T)\subseteq Span(S)$, allora $Span(S)=Span(T)$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Sia $X$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie del tipo $(a^2, a)$, al variare di $a$ in $\mathbf{R}$. Stabilire se $X$ è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

*Svolgimento.* Consideriamo il vettore $(4, 2)$, che appartiene ad $X$. Il vettore $(-1)\cdot(4, 2) = (-4, -2)$ non appartiene ad $X$, in quanto non esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $(-4, -2) = (a^2, a)$. Dunque $X$ non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e quindi $X$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

**Esercizio 6.** *Al variare dell'istante di tempo $t$ in $\mathbf{R}$, calcolare il rango della matrice:* $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & t & -t \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-3)$ ed $e_{3,1}(-4)$ si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & t-4 & -t-4 \end{bmatrix}.$$

Si osservi che tale matrice non è (in generale) a scala. Per renderla tale, assumiamo $t \neq 3$, ed eseguiamo l'operazione $e_{3,2}(-\frac{t-4}{t-3})$. Otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & -t-4 \end{bmatrix}.$$

Poiché è a scala, possiamo leggerne il rango, e dedurne che: se $t \notin \{3, -4\}$, allora il rango di $A(t)$ è 3, e se $t = -4$ il rango di $A(-4)$ è 2.

Rimane da esaminare il caso $t = 3$. In tal caso, eseguendo su $A(3)$ le operazioni elementari $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-4)$ e $p_{2,3}$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi il rango di $A(3)$ è 2.

In conclusione:

$$rk(A(t)) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \notin \{3, -4\} \\ 2 & \text{se } t \in \{3, -4\}. \end{cases}$$ ■

## Geometria ed Algebra 1, II esonero, 26 novembre 2004.

**Esercizio 1.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *e verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{3,1}(-2)$, $e_3(-1)$, $e_{1,3}(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ ■

**Esercizio 2.** *Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} 2x + y + z + t = -1 \\ x + 2y + 2z + 2t = 4 \\ x + y + z + t = 1. \end{cases}$$

*Dire se $Sol(\mathcal{S})$ è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z - t \\ y = 3 - z - t. \end{cases}$$

Per cui una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$, è data dall'applicazione:

$$(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-2, 3 - z - t, z, t) \in Sol(\mathcal{S}).$$

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$ (infatti il sistema $\mathcal{S}$ non è omogeneo). ■

**Esercizio 3.** *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + z, 2x + y - z)$. Calcolare una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$. Quali sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono trasformati, tramite $f$, in $(1, 2)$?*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, la cui riduzione a scala è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, cioè $Im(f) = \mathbf{R}^2$, ed una sua base è la base canonica di $\mathbf{R}^2$. $Ker(f)$ ha dimensione 1, ed una sua base, ottenuta risolvendo il sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$, è data dal vettore $(2, -3, 1)$.

I vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono trasformati, tramite $f$, in $(1, 2)$, sono quei vettori $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tali che:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si vede che ce ne sono $\infty^1$, e precisamente sono i vettori $(1 + 2z, -3z, z)$, al variare di $z$ in $\mathbf{R}$. ■

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1, -1, 2)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per $U$.*

*Svolgimento.* Sia $(x, y, z)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^3$. Allora $(x, y, z) \in U$ se e solo se il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 2 & z \end{bmatrix}$ è 1. Riducendo a scala, ciò equivale a dire che il rango della matrice: $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & x + y \\ 0 & -2x + z \end{bmatrix}$ è 1. Cioè che: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$. Quest'ultimo sistema è la rappresentazione cartesiana cercata di $U$. ■

**Esercizio 5.** *Posto $A := \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = t^2 - 2t - 48$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-6$ e $8$. L'autospazio $V_{-6}$ ammette come base $(1, -1)$, mentre l'autospazio $V_8$ ammette come base $(1, 1)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 6.** *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ha il nucleo definito dall'equazione $x + z = 0$. Sapendo che $f(1, 0, 0) = (-5, 3, 5)$, calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Dire se $f$ è, oppure no, diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Nel nucleo di $f$ ci sono i vettori $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, 0)$. Poiché $f(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$, ed $f$ è lineare, allora $f(1, 0, 0) = f(0, 0, 1)$. Deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t^3$. Quindi $m_a(0) = 3$. Ma $m_g(0) = 2$, e dunque $f$ non è diagonalizzabile. ■

## Geometria ed Algebra 1, II appello, $1^0$ dicembre 2004.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(0,0,0,1,)$, $(3,3,3,4)$. Posto $\mathcal{B} := \{(1,1,1,1),(1,1,1,2)\}$, provare che $\mathcal{B}$ è una base per $U$. Provare che il vettore $\mathbf{u} := (5,5,5,7)$ appartiene ad $U$, e calcolarne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

*Svolgimento.* Disponendo i quattro vettori assegnati in riga nell'ordine dato, si forma la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala per righe $A$, *senza effettuare scambi*, si perviene alla matrice a scala: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ciò prova che le prime due righe di $A$ formano una base per lo spazio delle sue righe, cioè che $\mathcal{B}$ è una base per $U$.

Infine osserviamo che $(5,5,5,7) = 3(1,1,1,1)+2(1,1,1,2)$, il che prova che $\mathbf{u} \in U$, e che le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono: $(3,2)^T$. ■

**Esercizio 2.** *Aggiungere ai vettori $(1,1,1,0,0)$, $(1,1,1,1,0)$, $(1,1,1,0,1)$ opportuni vettori della base canonica in modo da formare una base per $\mathbf{R}^5$.*

*Svolgimento.* Sia $A$ la matrice ottenuta mettendo in riga i vettori assegnati. Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se aggiungiamo ad $S$ le righe $e_2$ ed $e_3$, otteniamo la matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5. Per cui $\{(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)\}$ è una base di $\mathbf{R}^5$. Quindi, per formare una base di $\mathbf{R}^5$ a partire dai vettori assegnati, è sufficiente aggiungere i vettori canonici $e_2$ ed $e_3$. ■

**Esercizio 3.** *Stabilire se la seguente matrice $A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile oppure no.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -(t-1)^2(t-2)$. Per l' autovalore 1 abbiamo $m_a(1) = 2$, ma $m_g(1) = 3 - rk(A-I) = 3 - rk \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 1 \neq m_a(1)$. Dunque $A$ non è diagonalizzabile. ■

**Esercizio 4.** *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ soddisfa le seguenti condizioni: $f(1,1) = (1,4)$, $f(1,2) = (2,2)$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Dire se $f$ è iniettiva oppure no. Dire se $f$ è suriettiva oppure no.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^2$ costituita dai vettori $(1,1)$, $(1,2)$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^2}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è 2, allora $dim(Im(f)) = 2$ e quindi $Im(f) = \mathbf{R}^2$. Per cui $f$ è suriettiva. Per il Teorema della dimensione $dim(Ker(f)) = 0$, e quindi $f$ è anche iniettiva. ■

**Esercizio 5.** *Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare che trasforma il generico vettore $(x, y, z, t)$ in $f(x, y, z, t) = (x + y + z + t, x + y + z + 2t, t, 3x + 3y + 3z + 4t)$. Calcolare una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica è: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2, ed una base per $Im(f)$ è costituita dai vettori $(1, 1, 0, 3)$, $(1, 2, 1, 4)$. Per ottenere una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$, disponiamo in colonna i due vettori precedenti $(1, 1, 0, 3)$, $(1, 2, 1, 4)$, vi aggiungiamo il vettore generico $(x, y, z, t)$, riduciamo a scala, ed infine imponiamo che il rango della matrice ottenuta sia 2. Si ottiene che una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dal sistema lineare $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - t = 0 \end{cases}$.

Il nucleo ha dimensione 2, ed è rappresentato dal sistema lineare $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$. Possiamo scegliere $y$ e $z$ come variabili libere. Una rappresentazione parametrica di $Ker(f)$ è data dalla funzione: $(y, z) \in \mathbf{R}^2 \to (-y - z, y, z, 0) \in Ker(f)$. In corrispondenza della base canonica di $\mathbf{R}^2$ otteniamo una base per $Ker(f)$. Cioè, una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$. ■

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 9 dicembre 2004.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -8 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,5}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,2}(1)$, $p_{3,5}$, $p_{4,5}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito 3 scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 9$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,4}(-1)$, $e_{2,4}(-1)$, $e_{1,4}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

**Esercizio 3.** *Si consideri il seguente operatore lineare: $f : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \to (x + z, x + z, x + z) \in \mathbf{R}^3$. Calcolare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ sia diagonale.*

*Svolgimento.* La matrice di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Quindi il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t^2(t-2)$. Gli autovalori di $f$ sono 0 e 2. Una base per l'autospazio $V_0$ è data dai vettori $e_1 - e_3$, $e_2$. Una base per l'autospazio $V_2$ è data dal vettore $e_1 + e_3$. In conclusione, la base cercata è: $\mathcal{A} := \{e_1 - e_3, e_2, e_1 + e_3\}$. $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ l'operatore lineare definito ponendo: $f(x,y,z,t) = (x - y - z - t, 2x - 2y - 2z - 2t)$. Calcolare la dimensione ed una base per $Ker(f)$ ed $Im(f)$. Determinare una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* La matrice che rappresenta $f$ rispetto alle basi canoniche è: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 1, una base è costituita dal vettore $(1,2)$, ed una sua rappresentazione cartesiana è data dall'equazione $2x - y = 0$. Il nucleo ha dimensione 3, ed è rappresentato dall'equazione: $x - y - z - t = 0$. Possiamo scegliere $y, z, t$ come variabili libere. Quindi $x = y + z + t$, ed una base per $Ker(f)$ è data dai vettori: $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Per quali valori del parametro $k$ il seguente sistema lineare ammette infinite soluzioni?*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + 9y = -3. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $9 - k^2$. Per il Teorema di Cramer, se $k \notin \{-3, 3\}$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Quando $k = 3$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni. Quando $k = -3$, ci sono $\infty^1$ soluzioni.

Per cui, in conclusione: $\mathcal{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se $k = -3$ . $\blacksquare$

**Esercizio 6.** *Si consideri la base $\mathcal{B} := \{3 + x, 2 + x\}$ per lo spazio dei polinomi $V := \mathbf{R}[x]_{\leq 1}$. Sia $f : V \to V$ l'operatore lineare che al polinomio $p(x)$ associa la sua derivata. Determinare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

*Svolgimento.* Osserviamo che $f(3+x) = 1 = (3+x) - (2+x)$, $f(2+x) = 1 = (3+x) - (2+x)$. Quindi:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 22 settembre 2005.

**Esercizio 1.** *Si considerino il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(2,0,1,3)$, ed il sottospazio $V$ definito dalle equazioni: $\begin{cases} 2y + t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Calcolare una base per $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Innanzitutto calcoliamo una rappresentazione cartesiana di $U$. Essa è data dal sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x - z - t = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \end{cases}$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è data dal sistema lineare che si ottiene considerando sia le equazioni di $U$ che quelle $V$:

$$\begin{cases} 2y + t = 0 \\ z = 0 \\ 2x - z - t = 0 \\ 3x - y - 2t = 0. \end{cases}$$

Riducendo a scala, si ottiene il sistema lineare equivalente:

$$\begin{cases} 2x - z - t = 0 \\ 2y - 3z + t = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, possiamo assumere come variabile libera $t$, ed il generico vettore di $U \cap V$ si può mettere nella forma $(\frac{t}{2}, -\frac{t}{2}, 0, t)$, $t \in \mathbf{R}$. In conclusione, una base per $U \cap V$ è data dal vettore $(1, -1, 0, 2)$. ∎

**Esercizio 2.** *Calcolare il determinante della seguente matrice* $A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 12 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-3)$, $e_{5,2}(-1)$, $e_{4,3}(-1)$, $e_{5,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Non avendo eseguito scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. ∎

**Esercizio 3.** *Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ delle soluzioni del sistema lineare:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x + y + z - t = 1 \\ x + 2z - 2t = 0 \\ 3x + 2y = 2. \end{cases}$$

*Dire se $Sol(\mathcal{S})$ è, oppure no, un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$ si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere tali soluzioni, possiamo assumere $z$ e $t$ come variabili libere, ed $\mathcal{S}$ è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + y = z - t + 1 \\ y = 3z - 3t + 1. \end{cases}$$

Per cui una rappresentazione parametrica per $Sol(\mathcal{S})$, è data dall'applicazione:

$$(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (-2z + 2t, 3z - 3t + 1, z, t) \in Sol(\mathcal{S}).$$

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$ (infatti il sistema $\mathcal{S}$ non è omogeneo). ∎

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ avente come base $\mathcal{B} := \{(1, 0, 0), (2, 4, 6)\}$. Sia $f : U \to U$ l'applicazione lineare che al generico vettore $(x, y, z)$ di $U$ associa il vettore $f(x, y, z) = (-x + 2y - z, -2x + 4y - 2z, -3x + 6y - 3z)$. Calcolare $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.*

*Svolgimento.* Osserviamo che $f(1, 0, 0) = (-1, -2, -3) = 0 \cdot (1, 0, 0) - \frac{1}{2} \cdot (2, 4, 6)$, e $f(2, 4, 6) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 0, 0) + 0 \cdot (2, 4, 6)$. Dunque:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *Si consideri la matrice:*

$$A_k := \begin{bmatrix} k & 2 & -k-1 \\ k & 4 & -k-3 \\ k-1 & 2 & -k \end{bmatrix}.$$

*Sapendo che il polinomio caratteristico di $A_k$ è $p(t) = -(t-1)^2(t-2)$, determinare per quali valori del parametro $k$ la matrice $A_k$ è diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* La matrice $A_k$ è diagonalizzabile se e solo se $m_g(1) = 2$. Ma:

$$m_g(1) = 3 - rk(A_k - I) = 3 - rk \begin{bmatrix} k-1 & 2 & -k-1 \\ k & 3 & -k-3 \\ k-1 & 2 & -k-1 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 3 \\ 2 & \text{se } k = 3 \end{cases}.$$

Quindi la matrice $A_k$ è diagonalizzabile se e solo se $k = 3$. ■

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 29 settembre 2005.

**Esercizio 1.** *Sia $V$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici del tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ verificanti la proprietà $a+b+c+d=0$. Verificare che $V$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e calcolarne una base.*

*Svolgimento.* Osserviamo che poiché $a+b+c+d = 0$, allora possiamo scrivere:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto che le matrici $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartengono a $V$, l'uguaglianza precedente $(^*)$ dimostra che $V = Span\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Ciò prova che $V$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e che le matrici $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ne costituiscono un sistema di generatori. La stessa uguaglianza $(^*)$ prova che tali generatori sono liberi, quindi formano una base per $V$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, e verificare l'esattezza del risultato.*

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{2,3}(-2)$, $e_{1,3}(-3)$, $e_{1,2}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, stabilire quando il seguente sistema lineare è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni:*

$$\mathcal{S} := \begin{cases} ax + 4y = a \\ x + ay = 3 - a. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice incompleta di $\mathcal{S}$ ha determinante $a^2 - 4$. Per il Teorema di Cramer, se $a \notin \{-2, 2\}$, allora il sistema è compatibile, ed ammette un'unica soluzione. Tale soluzione può essere calcolata con la Regola di Cramer, ed è $(\frac{a+6}{a+2}, -\frac{a}{a+2})$.

Quando $a = -2$ è evidente che il sistema non ammette soluzioni.

Quando $a = 2$, il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, date da $(1-2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$.

In conclusione: $\mathcal{S}$ è compatibile se e solo se $a \neq -2$. In tal caso, se $a \neq 2$, ammette un'unica soluzione data da: $(\frac{a+6}{a+2}, -\frac{a}{a+2})$. Se invece $a = 2$, il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, date da $(1-2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$. ■

**Esercizio 4.** *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ trasforma il vettore $(1,1,1)$ in $(3,0)$, ed ha come nucleo il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ definito dall'equazione $x+y+z=0$. Calcolare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alle basi canoniche.*

*Svolgimento.* I vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ formano una base per il nucleo di $f$, e l'insieme $\mathcal{B}$ formato dai vettori $(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)$ forma una base per $\mathbf{R}^3$. Ora denotiamo con $\mathcal{E}_2$ ed $\mathcal{E}_3$ le basi canoniche di $\mathbf{R}^2$ e di $\mathbf{R}^3$. La matrice cercata è:

$$M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2}(f) \cdot M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_2}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_3}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *Sia $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dire se $A$ è, oppure no, diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -(t+6)t(t-8)$. Quindi la matrice $A$ è $3 \times 3$ e possiede 3 autovalori distinti. Ciò implica che la matrice $A$ è diagonalizzabile.

Allo scopo di determinare la matrice $P$, osserviamo che l'autospazio $V_{-6}$ ammette come base il vettore $(1,0,-1)$, l'autospazio $V_0$ ammette come base il vettore $(0,1,0)$, e l'autospazio $V_8$ ammette come base il vettore $(1,0,1)$. Quindi la matrice invertibile cercata è la matrice:

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

## Geometria, I esonero, 4 aprile 2007.

**Esercizio 1.** *Sia $X$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie $(x_1, x_2)$ tali che $x_1 \leq x_2$. Dire se $X$ è, oppure non è, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

*Svolgimento.* La coppia $(1,2) \in X$. Ma $(-1)\cdot(1,2) = (-1,-2) \notin X$. Quindi $X$ non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e perciò non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 3 & 6 \\ 1 & 1 & k-1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Poiché $A_k$ possiede la sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ che ha rango 2, possiamo dire a priori che $A_k$ ha rango $\geq 2$, per ogni $k$. D'altra parte, il determinante di $A_k$ è $-2(k-2)(k-3)$. Quindi il rango di $A$ è 3 se e solo se $k \notin \{2,3\}$.

In conclusione:

$$rk(A_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \notin \{2,3\} \\ 2 & \text{se } k \in \{2,3\}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(5,-2,10)$, $(2,1,1)$ e $(1,-1,3)$. Sia $V$ il sottospazio generato dai vettori $(0,1,2)$, $(2,0,1)$ e $(2,4,9)$. Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U+V$ e $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ciò implica che $dim(U) = 2$, ed una sua base è data dai vettori: $(1,-1,3)$, $(0,3,-5)$.

Un'analisi analoga prova che $dim(V) = 2$, ed una base per $V$ è costituita dai vettori $(0,1,2)$, $(2,0,1)$.

Poiché $U = Span((1,-1,3),\ (0,3,-5))$ e $V = Span((0,1,2),(2,0,1))$, allora $U+V$ è generato dai vettori $(1,-1,3)$, $(0,3,-5)$, $(0,1,2)$, $(2,0,1)$. Come prima, per calcolare una base e la dimensione di $U+V$, disponiamo in riga i generatori di $U+V$ e riduciamo a scala. Si ottiene che $dim(U+V)=3$, perciò $U+V=\mathbf{R}^3$, ed una sua base è data dalla base canonica.

Infine, dalla formula di Grassmann sappiamo che $dim(U\cap V)=1$. Quindi per trovare una base di $U\cap V$, è sufficiente trovare un vettore non nullo di $U\cap V$. A tale proposito, sia $\mathbf{w}$ un vettore appartenente sia ad $U$ che a $V$. Allora esistono pesi $(x,y,z,t)$ tali che:

$$\mathbf{w} = x(1,-1,3)+y(0,3,-5) = z(0,1,2)+t(2,0,1).$$

L'equazione precedente conduce al sistema lineare:

$$\begin{cases} x = 2t \\ -x+3y = z \\ 3x-5y = 2z+t. \end{cases}$$

Una soluzione non banale è: $(22,9,5,11)$. Quindi una base per $U\cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (22,5,21)$. ■

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,1,2,1)$, $(0,1,2,3)$ e $(0,0,0,1)$. Calcolare una base di $U$, ed estenderla a base di $\mathbf{R}^4$. Infine determinare un sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U\oplus V$.*

*Svolgimento.* Disponendo i generatori assegnati in riga e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per $U$ è: $\mathcal{B} := \{(0,1,2,1),(0,0,0,1)\}$. Inoltre, disponendo i vettori di $\mathcal{B}$ in riga, ed aggiungendo i vettori canonici $e_1$ ed $e_3$, si ottiene una matrice $4\times 4$ di rango 4. Quindi una base di $\mathbf{R}^4$ che estende $\mathcal{B}$ è: $\{(0,1,2,1),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$. Il sottospazio cercato è quello generato dai vettori aggiunti, cioè è $V := Span(e_1,e_3)$. ■

**Esercizio 5.** *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $e_{3,2}(-1)$, $p_{3,4}$, $e_{4,3}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero dispari di scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -2$. ■

**Esercizio 6.** *Fare un esempio di due matrici $A$ e $B$ equivalenti per righe, per le quali i rispettivi spazi generati dalle colonne non coincidono.*

*Svolgimento.* Poniamo $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, e $B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La matrice $B$ è la riduzione a scala per righe di $A$. Quindi $A$ e $B$ sono equivalenti per righe (e $Span((1,1,1))$ è lo spazio generato dalle righe di $A$, che coincide con lo spazio generato dalle righe di $B$). Ma lo spazio generato dalle colonne di $A$, cioè $Span((1,1))$, è diverso dallo spazio generato dalle colonne di $B$, che è $Span((1,0))$. ■

## Geometria, II esonero e II appello, 4 maggio 2007.

**Esercizio 1.** *Utilizzando il Teorema degli Orlati, discutere il rango della seguente matrice $A_t$ in funzione del parametro $t$, ed individuarne una base per lo spazio generato dalle righe, ed una per lo spazio generato dalle colonne.*

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -t & t \\ 0 & t & -t & 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Partiamo dal minore $[-t]$ di posto $1,2$. Se $t \neq 0$, tale minore è nonsingolare. Per cui, se $t \neq 0$ allora $rk(A_t) \geq 1$. Orliamolo con la seconda riga e la terza colonna. Otteniamo il minore $\begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix}$, il cui determinante è $t^2$, che è non nullo se $t \neq 0$. Per cui, se $t \neq 0$ allora $rk(A_t) \geq 2$. Orliamo tale minore con la terza riga e la quarta colonna. Otteniamo il minore $\begin{bmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -t & t \\ t & -t & 1 \end{bmatrix}$, il cui determinante è $-t^2(t-1)$. Quindi, se $t \notin \{0,1\}$, $rk(A_t) \geq 3$. Poiché non è possibile orlare ulteriormente quest'ultimo minore, deduciamo, in base al Teorema degli Orlati, che esso è un minore fondamentale per $A_t$. Perciò, se $t \notin \{0,1\}$, allora $rk(A_t) = 3$, e una base per lo spazio delle righe è data dalle righe di $A_t$, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla seconda, terza e quarta colonna.

Per completare l'analisi del rango di $A_t$, occorre esaminare i casi restanti $t = 0$, e $t = 1$.

Se $t = 0$, la matrice $A_t$ diviene: $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. In questo caso partiamo dal minore nonsingolare $[1]$, di posto $1,1$. Orliamo tale minore con la terza riga e la quarta colonna. Otteniamo il minore nonsingolare $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Poiché tutti gli orlati di questo minore sono singolari (cioè hanno determinante nullo), allora $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è un minore fondamentale, e quindi $rk(A_0) = 2$, e una base per lo spazio delle righe è data dalla prima e dalla terza riga, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla prima e dalla quarta colonna.

Infine supponiamo $t = 1$. La matrice $A_t$ diviene: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Un ragionamento analogo mostra che $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è un minore fondamentale. Quindi $rk(A_1) = 2$, e una base per lo spazio delle righe è data dalla prima e dalla seconda riga, mentre una base per lo spazio delle colonne è data dalla prima e dalla seconda colonna. ∎

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice $A$, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $p_{2,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-4)$, $e_{3,4}(-7)$, $e_{2,4}(3)$, $e_{2,3}(1)$, $e_{1,3}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,2,0,0)$, $(1,0,2,0)$ e $(3,2,2,2)$. Sia $V$ il sottospazio definito dall'equazione $4x+y+z+2t=0$. Calcolare una rappresentazione cartesiana di $U$, una base per $U \cap V$, e dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^4 = U+V$.*

*Svolgimento.* I generatori assegnati formano una base per $U$. Per cui, detto $(x,y,z,t)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$, allora $(x,y,z,t) \in U$ se e solo se:

$$det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & 0 & 2 & t \end{bmatrix} = 0,$$

cioè se e solo se $2x+y-z-3t=0$. Questa equazione è la rappresentazione cartesiana di $U$. Quindi $U \cap V$ è rappresentato dal sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x+y-z-3t=0 \\ 4x+y+z+2t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-z-\frac{5}{2}t, 3z+8t, z, t) \in U \cap V$. Deduciamo che una base per $U \cap V$ è data dai vettori: $(-1,3,1,0)$, $(-5,16,0,2)$. In particolare $dim(U \cap V) = 2$, e dalla formula di Grassmann deduciamo che $dim(U+V) = 4$, per cui è vero che $\mathbf{R}^4 = U+V$. ■

**Esercizio 4.** *Calcolare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$, dove $A$ è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -4 \\ 18 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

*Verificare che il risultato ottenuto è corretto.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(t) = -t(t+1)(t+2)$. L'autospazio $V_{-2}$ è generato da $(1,2,1)$, l'autospazio $V_{-1}$ è generato da $(1,3,0)$, e l'autospazio $V_0$ è generato da $(2,4,1)$. Quindi le matrici cercate sono: $P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $D := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Per verificare che il risultato è corretto, è sufficiente osservare che $P$ è invertibile (infatti $det(P) = -1 \neq 0$), e che $PD = AP$. ■

**Esercizio 5.** *Sia $X$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito da tutte le coppie del tipo $(t^2,t^2)$, $t \in \mathbf{R}$. Sia inoltre $Y$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito da tutte le coppie del tipo $(t^3,t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Dire se $X$ ed $Y$ sono sottospazi di $\mathbf{R}^2$ oppure no.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che $(1,1) \in X$, ma $(-1)\cdot(1,1) = (-1,-1) \notin X$, in quanto non esiste un $t \in \mathbf{R}$ tale che $t^2 = -1$ (in altre parole, in $\mathbf{R}$ non esiste la radice quadrata di un numero negativo). Per cui $X$ non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e quindi $X$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.

Invece ogni numero reale ammette una (unica) radice cubica reale. Ciò comporta che $Y$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. Infatti $\mathbf{0} \in Y$. Poi, se $(t^3,t^3) \in Y$ e $(s^3,s^3) \in Y$, allora $(t^3,t^3)+(s^3,s^3) = (t^3+s^3, t^3+s^3) = (u^3,u^3) \in Y$, dove $u$ è la radice reale cubica di $t^3+s^3$ (che esiste, ed è unica, per ogni numero reale). Ciò prova che $Y$ è stabile rispetto all'addizione. Infine, se $(t^3,t^3) \in Y$ e $a \in \mathbf{R}$, allora $a\cdot(t^3,t^3) = (at^3,at^3) = (v^3,v^3) \in Y$, dove $v$ è la radice reale cubica di $at^3$. Ciò prova che $Y$ è anche stabile rispetto alla moltiplicazione esterna, e dunque che $Y$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

**Esercizio 6.** *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{4,1}(-2)$, $p_{2,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero pari di scambi, deduciamo: $det(A) = det(S) = -3$. ■

**Esercizio 7.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ definito dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+z+t=0. \end{cases}$$

*Determinare un sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $U$, si perviene alla seguente rappresentazione parametrica di $U$: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-z-t, 0, z, t) \in U$. Quindi una base per $U$ è data dai vettori: $(-1,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Aggiungendo alle righe di tale matrice i vettori canonici $e_2$ ed $e_4$, si forma una matrice a scala di rango 4. Quindi $\{(-1,0,1,0),(-1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di $U$. Allora il sottospazio cercato è il sottospazio generato dai vettori che abbiamo aggiunto, cioè $V := Span((0,1,0,0),(0,0,0,1))$. ■

## Geometria, III appello, 11 maggio 2007.

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-4)$, $e_{4,1}(-5)$, $e_{3,2}(-1)$, $e_{4,2}(-1)$, $e_{4,3}(-\frac{7}{3})$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito un numero dispari di scambi, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -24$. ■

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice $A$, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,4}$, $e_{2,1}(-2)$, $p_{3,4}$, $e_3(-1)$, $e_{3,4}(5)$, $e_{2,4}(2)$, $e_{1,4}(3)$, $e_{1,3}(-3)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -12 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_k = \begin{bmatrix} -k & 3-k & 3k \\ 1 & 2 & k \\ 1 & k+5 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo le operazioni elementari $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-k)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice:

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & k+3 & k(k+3) \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+3) \end{bmatrix}.$$

Se $k \notin \{-1, -3\}$, allora $S_k$ è a scala, ed ha 3 righe non nulle: quindi in tal caso il rango di $A_k$ è 3. Se $k = -1$, allora $S_{-1}$ è a scala, ed ha 2 righe non nulle: in tal caso il rango di $A_{-1}$ è 2. Se $k = -3$, allora $S_{-3}$ è a scala, ed ha soltanto una riga non nulla: in tal caso il rango di $A_{-3}$ è 1. In conclusione:

$$rk(A_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = -3 \\ 2 & \text{se } k = -1 \\ 3 & \text{se } k \notin \{-3, -1\}. \blacksquare \end{cases}$$

**Esercizio 4.** *Calcolare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$, dove $A$ è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} -49 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 \\ -27 & 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

*Verificare che il risultato ottenuto è corretto.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è $p_A(t) = -t(t+4)(t-5)$. L'autospazio $V_{-4}$ è generato da $(2, 0, 1)$, l'autospazio $V_0$ è generato da $(0, 1, 0)$, e l'autospazio $V_5$ è generato da $(5, 0, 3)$. Quindi le matrici cercate sono: $P := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $D := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Per verificare che il risultato è corretto, è sufficiente osservare che $P$ è invertibile (infatti $det(P) = 1 \neq 0$), e che $PD = AP$. $\blacksquare$

**Esercizio 5.** *Per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ la seguente matrice è diagonalizzabile?*

$$A_k = \begin{bmatrix} 3-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A_k$ è $p_{A_k}(t) = (t-1)^2$. Quindi, indipendentemente da $k$, la matrice $A_k$ ha solo l'autovalore 1, con molteplicità algebrica 2. D'altra parte:

$$m_g(1) = 2 - rk(A_k - I) = 2 - rk \begin{bmatrix} 2-2k & 4k-4 \\ 1-k & 2k-2 \end{bmatrix} = 2 - rk\left((k-1) \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 1 \\ 1 & \text{se } k \neq 1. \end{cases}$$

Quindi la matrice $A_k$ è diagonalizzabile se e solo se $k = 1$. $\blacksquare$

**Esercizio 6.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato di vettori $(1, 2, -1, 1)$ e $(2, 1, 1, 1)$, e sia $V$ il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + z + 5t = 0 \\ 2x + 3y + z + 9t = 0 \\ x + y + z + 4t = 0. \end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione cartesiana per $U + V$. Dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $V$ si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $V$: $t \in \mathbf{R} \to (-3t, -t, 0, t) \in V$. Quindi una base per $V$ è costituita dal vettore $(-3, -1, 0, 1)$. Ne consegue che $U + V = Span((1, 2, -1, 1), (2, 1, 1, 1), (-3, -1, 0, 1))$. Disponendo in riga i tre generatori di $U + V$, e riducendo a scala, si ottiene una matrice di rango 3. Dunque $\{(1,2,-1,1),(2,1,1,1),(-3,-1,0,1)\}$ è una base per $U+V$, che allora ha dimensione 3, e perciò $\mathbf{R}^4 \neq U \oplus V$. Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il generico vettore $(x,y,z,t)$ di $\mathbf{R}^4$ dipenda linearmente da $(1,2,-1,1),(2,1,1,1),(-3,-1,0,1)$, cioè imponendo che per la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & x \\ 2 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

si abbia: $det(A) = 0$. Poiché $det(A) = 5x + 3y - z - 12t$, ciò equivale a dire che:

$$5x + 3y - z - 12t = 0.$$

Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$. ■

**Esercizio 7.** *Si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}$:*

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 4t = 1 \\ x + 2y + z + t = 3 \\ 3x + 5y + 5t = 4 \\ x + y - 2z + 3t = -2. \end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S})$ di $\mathcal{S}$. Dedurne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Dire infine se $Sol(\mathcal{S})$ è oppure no un sottospazio di $\mathbf{R}^4$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa di $\mathcal{S}$, si ottiene il seguente sistema lineare equivalente ad $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 5. \end{cases}$$

La matrice completa ed incompleta di tale sistema lineare hanno lo stesso rango 2. Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ammette $\infty^2$ soluzioni, e, per descriverle parametricamente, possiamo scegliere $z, t$ come variabili libere. La rappresentazione parametrica cercata è: $\rho : (z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-7 + 5z - 5t, 5 - 3z + 2t, z, t) \in Sol(\mathcal{S})$.

Per ottenere una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}^*$, associato ad $\mathcal{S}$, ricordiamo che essa si ottiene da $\rho$ "togliendo i termini costanti". Cioè una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato è la funzione: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (5z-5t, -3z+2t, z, t) \in Sol(\mathcal{S}^*)$.

Infine, $Sol(\mathcal{S})$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ in quanto non è un sistema omogeneo (e quindi $\mathbf{0} \notin Sol(\mathcal{S})$). ■

## Geometria, appello straordinario, 18 luglio 2007.

**Esercizio 1.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato di vettori $(1,-1,0,0)$, $(6,-3,-2,-1)$ e $(4,-2,-1,-1)$, e sia $U$ il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + z - t = 0. \end{cases}$$

*Provare che $U$ è contenuto in $V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $U$, otteniamo la seguente rappresentazione parametrica di $U$: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-z-3t, 2t, z, t) \in U$. Una base per $U$ è costituita dai vettori corrispondenti alla base canonica di $\mathbf{R}^2$, cioè dai vettori $(-1,0,1,0)$, $(-3,2,0,1)$.

Per provare che $U$ è contenuto in $V$ è sufficiente provare che i vettori $(-1,0,1,0)$ e $(-3,2,0,1)$ appartengono a $V$. Per fare ciò, disponiamo in riga, ordinatamente, i generatori di $V$, e poi la base di $U$. Formiamo in tal modo la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Riducendo a scala, e senza effettuare scambi di riga, si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, nella riduzione a scala, i vettori $(-1, 0, 1, 0)$ e $(-3, 2, 0, 1)$ si sono trasformati in $\mathbf{0}$. Poiché non abbiamo effettuato scambi di riga, ciò implica che essi dipendono linearmente dalle prime tre righe di $A$, cioè che appartengono a $V$.

Un metodo alternativo per provare che i vettori $(-1, 0, 1, 0)$ e $(-3, 2, 0, 1)$ appartengono a $V$ è il seguente: possiamo innanzitutto calcolare una rappresentazione cartesiana di $V$. Poiché i generatori di $V$ sono indipendenti, allora tale rappresentazione è data dall'equazione:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & x \\ -1 & -3 & -2 & y \\ 0 & -2 & -1 & z \\ 0 & -1 & -1 & t \end{bmatrix} = 0,$$

cioè dall'equazione: $x + y + z + t = 0$. Poiché i vettori $(-1, 0, 1, 0)$ e $(-3, 2, 0, 1)$ soddisfano tale equazione, allora essi appartengono a $V$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro* $t \in \mathbf{R}$*, calcolare il rango della seguente matrice:*

$$A_t = \begin{bmatrix} t^2+1 & 2t(t+1) & -t^2 & 2 \\ 1 & -6 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Effettuando le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-t^2 - 1)$, si perviene alla seguente matrice equivalente per righe ad $A_t$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & t^2+2t-1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice possiede il minore di ordine 3 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, che è nonsingolare. Quindi $A_t$ ha rango almeno 3. D'altra parte, poiché $A_t$ ha 3 righe, allora deve anche essere $rk(A_t) \leq 3$. In conclusione, possiamo dire che, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la matrice $A_t$ ha rango 3. ■

**Esercizio 3.** *Sia* $U$ *il sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *generato di vettori* $(1, 2, 2, 2)$, $(2, 3, 3, 3)$ *e* $(0, 1, 1, 1)$, *e sia* $V$ *il sottospazio rappresentato dal sistema lineare omogeneo:*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y + t = 0 \\ 2x - 4y + z + t = 0 \\ z - t = 0. \end{cases}$$

*Calcolare una base per* $U$, $V$, $U \cap V$ *e* $U + V$. *Infine determinare una rappresentazione cartesiana per* $U + V$.

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi una base per $U$ è formata dai vettori $(1, 2, 2, 2)$ e $(0, 1, 1, 1)$.

Riducendo a scala la matrice del sistema che rappresenta $V$, otteniamo il seguente sistema lineare equivalente e ridotto a scala:

$$(*) \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - t = 0. \end{cases}$$

Possiamo assumere $y$ e $t$ come variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per $V$ è data dalla funzione: $(y,t) \in \mathbf{R}^2 \to (2y-t, y, t, t) \in V$. Una base per $V$ è formata dai vettori $(2,1,0,0)$, $(-1,0,1,1)$.

Per calcolare una base di $U \cap V$, andiamo innanzitutto a calcolare una rappresentazione cartesiana di $U$. Essa si ottiene imponendo che:

$$rk \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \\ 2 & 1 & t \end{bmatrix} = 2.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di $U$ è: $\begin{cases} y - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$. Considerando sia le equazioni di $U$ che le equazioni (*) di $V$, si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U \cap V$:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - t = 0 \\ y - z = 0 \\ y - t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $t \in \mathbf{R} \to (t,t,t,t) \in U \cap V$. Perciò una base di $U \cap V$ è data dal vettore: $(1,1,1,1)$.

Sappiamo che $U + V$ è generato dai vettori $(1,2,2,2)$, $(0,1,1,1)$, $(2,1,0,0)$, $(-1,0,1,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, si ottiene la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base per $U + V$ è data dai vettori: $(1,2,2,2)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,1,1)$.

Infine, una rappresentazione cartesiana per $U + V$ è data dall'equazione:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & 1 & z \\ 2 & 1 & 1 & t \end{bmatrix} = 0,$$

cioè dall'equazione: $z - t = 0$. ■

**Esercizio 4.** *Calcolare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$, dove $A$ è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Calcolare $P^{-1}$, e verificare che i risultati ottenuti sono corretti.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -t(t+3)(t+1)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-3$, $-1$ e $0$. L'autospazio $V_{-3}$ ammette come base $(0,1,0)$, l'autospazio $V_{-1}$ ammette come base $(1,0,1)$, e l'autospazio $V_0$ ammette come base $(1,0,2)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

L'inversa della matrice $P$ è: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Come verifica conclusiva, osserviamo che:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \; ■$$

**Geometria, IV appello, 12 settembre 2007.**

**Esercizio 1.** *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{2,1}(-3)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-2)$, $e_{4,2}(-1)$, $p_{3,4}$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = -8$. ∎

**Esercizio 2.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice $A$, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,3}$, $e_1(-1)$, $e_{2,1}(-2)$, $p_{2,4}$, $e_{1,4}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Calcolare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$, dove $A$ è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -20 \\ 0 & 10 & 13 \end{bmatrix}.$$

*Verificare che il risultato ottenuto è corretto.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -t(t+7)(t-3)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-7$, $0$ e $3$. L'autospazio $V_{-7}$ ammette come base $(0,-2,1)$, l'autospazio $V_0$ ammette come base $(1,0,0)$, e l'autospazio $V_3$ ammette come base $(0,1,-1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Come verifica, osserviamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -17 & -20 \\ 0 & 10 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D. \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Siano $U$ e $V$ i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ rappresentati rispettivamente dai seguenti sistemi lineari:*

$$U := \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z-t=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad e \qquad V := \begin{cases} x+3y-z+t=0 \\ x+4y-2z+2t=0 \\ y-z+t=0. \end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice del sistema che rappresenta $U$, si ottiene il seguente sistema ridotto a scala:

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ t=0. \end{cases}$$

Quindi $U$ ha dimensione 2, e possiamo rappresentare parametricamente $U$ con le variabili libere $y$ e $z$: $(y,z) \in \mathbf{R}^2 \to (-y-z, y, z, 0) \in U$. Una base per $U$ è costituita dai vettori: $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$.

Con un ragionamento analogo si vede che una base per $V$ è costituita dai vettori: $(-2,1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$.

Deduciamo che $U+V$ è generato dai vettori $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,1,0)$, $(2,-1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori, e riducendo a scala, vediamo che una base per $U+V$ è formata dai vettori: $(-1,1,0,0)$, $(0,-1,1,0)$, $(0,1,0,1)$. Quindi un vettore $(x,y,z,t)$ di $\mathbf{R}^4$ appartiene ad $U+V$ se e solo se la seguente matrice:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha determinante nullo, cioè se e solo se $x+y+z-t=0$. Questa equazione è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$. ■

## Geometria, V appello, 26 settembre 2007.

**Esercizio 1.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice $A$, e verificare che il risultato è corretto.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,1}(-1)$, $p_{2,4}$, $p_{3,4}$, $e_{2,4}(-2)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

**Esercizio 2.** *Calcolare una matrice invertibile $P$ ed una matrice diagonale $D$ tali che $D = P^{-1}AP$, dove $A$ è la seguente matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

*Verificare che il risultato ottenuto è corretto.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -(t+5)(t+1)(t-1)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $-5$, $-1$ e $1$. L'autospazio $V_{-5}$ ammette come base $(1,0,0)$, l'autospazio $V_{-1}$ ammette come base $(0,1,-1)$, e l'autospazio $V_1$ ammette come base $(0,-2,1)$. Allora le matrici cercate sono: $D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Come verifica, osserviamo che:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D. \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,-1,1)$, $(1,2,0,1)$ e $(0,1,1,0)$, e sia $U$ il sottospazio generato da $(2,3,-1,2)$ e $(2,4,0,2)$. Provare che $V$ è contenuto in $U$. Vale il viceversa?*

*Svolgimento.* Una rappresentazione cartesiana per $U$ è data dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Poiché i generatori di $V$ soddisfano tali equazioni, possiamo dire che $V$ è contenuto in $U$.

Infine, poiché $dim(U) = dim(V) = 2$ e $V \subseteq U$, allora $U = V$. Quindi vale anche il viceversa, cioè anche $U$ è contenuto in $V$. $\blacksquare$

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(2,1,-2,-1)$, $(3,2,-3,-2)$ e $(5,3,-5,-3)$, e $V$ il sottospazio rappresentato dal sistema lineare:*

$$V := \begin{cases} 3x + z + 2t = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

(*a*) *Calcolare una base per $U$ ed una per $V$.*

(*b*) *Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U$ ed una per $V$.*

(*c*) *Calcolare una rappresentazione cartesiana ed una base per $U \cap V$.*

(*d*) *Calcolare una rappresentazione cartesiana ed una base per $U + V$.*

(*e*) *Determinare un sottospazio $W$ di $U + V$ tale che $U + V = U \oplus W$.*

*Svolgimento.* (*a*) Disponendo i generatori di $U$ in riga, e riducendo a scala, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, da cui deduciamo che una base per $U$ è costituita dai vettori $(2,1,-2,-1)$, $(0,1,0,-1)$. Per ottenere una base di $V$, andiamo a risolvere il sistema che lo rappresenta: risulta che una base per $V$ è data dai vettori $(1,1,-3,0)$, $(0,0,-2,1)$.

(*b*) Una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dal testo dell'esercizio. Per ottenerne una per $U$, andiamo ad imporre che la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & z \\ -1 & -1 & t \end{bmatrix}$ abbia rango 2. Ne risulta che una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dal sistema lineare: $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$.

(*c*) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando sia le equazioni che definiscono $V$ che quelle che definiscono $U$, cioè è:

$$\begin{cases} 3x + z + 2t = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $x \in \mathbf{R} \to (x, x, -x, -x) \in U \cap V$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $(1, 1, -1, -1)$.

($d$) Riunendo i generatori di $U$ e quelli di $V$ otteniamo un sistema di generatori per $U + V$: $(2, 1, -2, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(1, 1, -3, 0)$, $(0, 0, -2, 1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala, si vede che una base per $U + V$ è data dai vettori: $(2, 1, -2, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(1, 1, -3, 0)$. Allora una rappresentazione cartesiana per $U + V$ si ottiene imponendo che:

$$det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ -2 & 0 & -3 & z \\ -1 & -1 & 0 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Deduciamo che una rappresentazione cartesiana per $U + V$ è l'equazione: $x + 2y + z + 2t = 0$.

($e$) Poiché $(2, 1, -2, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(1, 1, -3, 0)$ formano una base per $U+V$, e $(2, 1, -2, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$ formano una base per $U$, possiamo porre $W := Span((1, 1, -3, 0))$. ■

## Geometria ed Algebra 1, I esonero, 9 novembre 2007.

**Esercizio 1.** *Sia $X$ il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ costituito dalle coppie $(x_1, x_2)$ tali che $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ . Dire quali delle condizioni richieste ad un sottospazio sono soddisfatte da $X$. Dedurne che $X$ è, oppure non è, un sottospazio di $\mathbf{R}^2$.*

*Svolgimento.* È evidente che il vettore nullo $(0, 0)$ appartiene ad $X$. Inoltre, se $(x_1, x_2)$, $(y_1, y_2)$ sono due vettori in $X$, poiché $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, allora deve anche essere $x_1 + y_1 \geq 0$, e $x_2 + y_2 \geq 0$. Per cui $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ appartiene ancora ad $X$, cioè $X$ è stabile rispetto all'addizione. Invece $X$ non è stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Infatti $(1, 0) \in X$, ma $(-1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin X$. In particolare, $X$ non è un sottospazio di $\mathbf{R}^2$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice $A_t$, e calcolarne una base per lo spazio delle righe, ed una per lo spazio delle colonne.*

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 2 & 5 & t+4 \\ t & t & t \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo sulle righe di $A_t$ le operazioni elementari $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-t)$ e $p_{2,3}$, si perviene alla seguente matrice:

$$B_t := \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 3-2t & t+2 \end{bmatrix}.$$

Se $t \neq 0$, allora possiamo assumere l'entrata $-t^2$ come pivot della seconda riga, e con l'ulteriore operazione elementare $e_{3,2}(\frac{3-2t}{t^2})$ si ottiene la seguente matrice a scala:

$$C_t := \begin{bmatrix} 1 & t+1 & 1 \\ 0 & -t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t+2 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che, se $t \notin \{-2, 0\}$, allora il rango di $A_t$ è 3, ed una base per lo spazio delle righe e delle colonne è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Se $t = -2$, allora il rango di $A_{-2}$ è 2, una base per lo spazio delle sue righe è data da $(1, -1, 1)$, $(0, -4, 0)$, ed una base per lo spazio delle sue colonne è data dalle prime due colonne di $A_{-2}$, cioè da $(1, 2, -2)^T$, $(-1, 5, -2)^T$ (le prime due colonne di $B_{-2}$, o di $C_{-2}$, non vanno bene, perché le operazioni sulle righe di $A_t$, mentre lasciano invariato lo spazio delle righe di $A_t$, ne alterano lo spazio delle colonne).

Se $t = 0$, allora il rango di $A_{-2}$ è 2, una base per lo spazio delle sue righe è data dalle prime due righe di $A_0$, $(1, 1, 1)$, $(2, 5, 4)$, ed una base per lo spazio delle sue colonne è data dalle prime due colonne di $A_0$, cioè da $(1, 2, 0)^T$, $(1, 5, 0)^T$. ■

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -1)$ e $(1, 1, -3)$. Sia $V$ il sottospazio generato dai vettori $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ e $(1, 3, 1)$. Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U + V$ e $U \cap V$. Dire se è vero oppure no che: $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$, $\mathbf{R}^3 = U + V$, $\mathbf{R}^3 \neq U + V$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala per righe, si perviene alla seguente matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $U$ ha dimensione 2, ed una sua base è data dai vettori: $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -1)$. Con un ragionamento analogo, si vede che $V$ ha dimensione 2, ed una sua base è data dai vettori: $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$. Un sistema di generatori di $U + V$ si ottiene unendo la base di $U$ con quella di $V$, cioè $U + V$ è generato dai vettori $(1, 0, -2)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$. Disponendo in riga e riducendo a scala si perviene alla matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi $U + V$ ha dimensione 3, $U + V = \mathbf{R}^3$, ed una sua base è la base canonica. Dalla formula di Grassmann sappiamo che $U \cap V$ ha dimensione 1. Per ottenerne una base è sufficiente calcolarne un vettore non nullo $\mathbf{w}$. Per una tale vettore devono esistere pesi $x, y, z, t$ non tutti nulli tali che:

$$\mathbf{w} = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1) = z(1, 1, 0) + t(0, 2, 1),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x = z \\ y = z + 2t \\ -2x - y = t. \end{cases}$$

Una soluzione non nulla di tale sistema è $(x, y, z, t) = (1, -1, 1, -1)$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (1, -1, -1)$.

Abbiamo già visto che $\mathbf{R}^3 = U + V$, che è quindi vero. Allora è falso che $\mathbf{R}^3 \neq U + V$, ed è anche falso che $\mathbf{R}^3 = U \oplus V$ in quanto $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$. ■

**Esercizio 4.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice, e verificare che il risultato ottenuto è corretto:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{3,4}(-3)$, $e_{2,4}(-2)$, $e_{1,4}(-1)$, $e_{2,3}(-1)$, $e_{1,3}(-1)$, $e_{1,2}(-1)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ ■$$

**Esercizio 5.** *Siano* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *vettori di uno spazio vettoriale. Si considerino i vettori* $\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ *e* $\mathbf{t} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$. *Provare che* $Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}) = Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\})$, *e che il sistema di vettori* $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ *è linearmente indipendente se e solo se lo è il sistema* $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$.

*Svolgimento.* Poiché i vettori $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ dipendono linearmente da $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, allora $Span(\{\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}) \subseteq Span(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$. D'altra parte le formule assegnate si possono invertire, e si ottiene:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{t}}{2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{t}}{2}, \quad \mathbf{w} = \frac{-\mathbf{r} + \mathbf{s} + \mathbf{t}}{2}.$$

Quindi, per lo stesso motivo di prima, deve anche essere $Span(\{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}\}) \supseteq Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\})$. In virtù della doppia inclusione, possiamo dire di aver provato che $Span(\{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}\}) = Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\})$.

Infine, se il sistema di vettori $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ è linearmente indipendente, allora $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\})$ ha dimensione 3. Quindi anche $Span(\{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}\})$ ha dimensione 3. Ma noi sappiamo che se uno spazio vettoriale ha dimensione 3, e tre dati vettori lo generano, allora tali vettori sono linearmante indipendenti. Ciò prova che anche $\{\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t}\}$ è linearmente indipendente, e viceversa. ∎

## Geometria ed Algebra 1, II esonero e II appello, 29 novembre 2007.

**Esercizio 1.** *Sia $X$ il sottoinsieme dello spazio delle matrici quadrate $\mathcal{M}(n,n)$ formato dalle matrici $A$ con $det(A) = 0$. Dire quali delle condizioni richieste ad un sottospazio sono soddisfatte da $X$. Dedurne che $X$ è, oppure non è, un sottospazio di $\mathcal{M}(n,n)$.*

*Svolgimento.* Poiché il determinante della matrice nulla è 0, allora il vettore nullo appartiene ad $X$. Inoltre, poiché $det(k \cdot A) = k^n det(A)$, allora $X$ è anche stabile rispetto alla moltiplicazione esterna. Ma $X$ non è stabile rispetto alla somma (quando $n > 1$). Infatti (per semplicità assumiamo $n = 2$) le matrici $A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ appartengono ad $X$, ma $A + B = I \notin X$ (un esempio analogo si può fare per ogni $n > 1$).

Osserviamo infine che quando $n = 1$, allora $X = \{0\}$, e perciò in tal caso $X$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(1,1) \simeq \mathbf{R}$. ∎

**Esercizio 2.** *Estendere a base di $\mathbf{R}^4$ il sistema $(0,1,2,3)$, $(0,1,2,4)$ e, posto $U = Span((0,1,2,3),(0,1,2,4))$, determinare un sottospazio $V$ di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$. Infine determinare un sottospazio $W$ tale che $\mathbf{R}^4 = U + W$ ma $\mathbf{R}^4 \neq U \oplus W$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala per righe, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Aggiungendo a tale matrice le righe $e_1$ ed $e_3$, si ottiene una matrice di rango 4. Per cui una base di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di $U$ è data dai vettori: $(0,1,2,3)$, $(0,1,2,4)$, $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$. Come sottospazio $V$ possiamo porre $V := Span(e_1, e_3)$. Invece come sottospazio $W$ possiamo porre $W := Span((0,1,2,4),(1,0,0,0),(0,0,1,0))$. ∎

**Esercizio 3.** *Calcolare il determinante della seguente matrice:*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_{4,1}(-1)$, $e_{5,1}(-2)$, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Avendo eseguito uno scambio, deduciamo: $det(A) = -det(S) = 1$. ∎

**Esercizio 4.** *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni $f(1,2,0) = (4,4,2)$, $f(2,5,0) = (8,8,4)$, $f(0,0,1) = (-4,-4,-2)$.*

*a) Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*
*b) Calcolare una base per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$.*
*c) Calcolare la dimensione di $Ker(f) \cap Im(f)$ e la dimensione di $Ker(f) + Im(f)$.*
*d) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(2,2,1)$.*
*e) Trovare una base $\mathcal{B}$ tale che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.*

*Svolgimento.* $a)$ Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,2,0)$, $(2,5,0)$, $(0,0,1)$. Allora abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

*b*) $Im(f)$ è generato dalle colonne della matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, quindi una base per $Im(f)$ è costituita dal vettore $(4,4,2)$. Il nucleo di $f$ è rappresentato dall'equazione $x-z=0$. Quindi una base per $Ker(f)$ è costituita dai vettori: $(1,0,1)$, $(0,1,0)$.

*c*) $Ker(f)+Im(f)$ è generato dai vettori $(4,4,2),(1,0,1),(0,1,0)$, che sono linearmente indipendenti. Quindi $dim(Ker(f)+Im(f))=3$ (e $Ker(f)+Im(f)=\mathbf{R}^3$). Per la formula di Grassmann si ha anche $dim(Ker(f)\cap Im(f))=0$.

*d*) Dei vettori assegnati, solo $(1,1,1)$ appartiene a $Ker(f)$, e solo $(2,2,1)$ appartiene ad $Im(f)$.

*e*) Il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t)=-t^2(t-2)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio $V_0$ (che coincide con $Ker(f)$) ammette come base $(1,0,1)$, $(0,1,0)$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $(2,2,1)$. Allora la base cercata è $\mathcal{B}:=\{(1,0,1),(0,1,0),(2,2,1)\}$. ■

**Esercizio 5.** *Al variare del parametro $k\in\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S}_k:\begin{cases} kx+ky=1\\ 4kx+(k^2-5)y=k+5.\end{cases}$$

*a) Dire per quali valori di $k$ il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile, e per quali non lo è.*

*b) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ sia compatibile, determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k$.*

*c) Dire per quali valori di $k$ il sistema $\mathcal{S}_k$ è omogeneo.*

*d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta infinite soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*e) Infine dimostrare che un sistema lineare omogeneo quadrato $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ ammette qualche soluzione non nulla se e solo se $det(A)=0$.*

*Svolgimento.* *a*) La matrice incompleta del sistema ha determinante $k(k+1)(k-5)$. Quindi se $k\notin\{-1,0,5\}$ il sistema è compatibile per il Teorema di Cramer (ed ammette un'unica soluzione). Se $k=0$ oppure se $k=5$, il sistema è incompatibile perché la matrice completa ha rango 2, mentre quella incompleta ha rango 1. Se $k=-1$, invece, la matrice completa e quella incompleta hanno lo stesso rango 1. Quindi in tal caso il sistema è compatibile (ed ammette $\infty^1$ soluzioni). In conclusione, il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e solo se $k\notin\{0,5\}$.

*b*) Quando $k\notin\{-1,0,5\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette l'unica soluzione: $(\frac{-5}{k(k-5)},\frac{1}{k-5})$. Quando $k=-1$, una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}_{-1})$ di $\mathcal{S}_{-1}$ è: $y\in\mathbf{R}\to(-1-y,y)\in Sol(\mathcal{S}_{-1})$.

*c*) Il sistema $\mathcal{S}_k$ non è mai omogeneo, perché, indipendentemente da $k$, il termine noto 1 è non nullo.

*d*) $(-1-y,y)=(-1,0)+y(-1,1)$.

*e*) Assumiamo che $A$ sia $n\times n$. L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ è un sottosapzio di $\mathbf{R}^n$ di dimensione $n-p$, dove $p$ è il rango di $A$. Allora il sistema ammette qualche soluzione non banale se e solo se $n-p>0$, cioè se e solo se $A$ non ha rango massimo, il che equivale a dire che $det(A)=0$. ■

**Esercizio 6.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da $(1,1,5)$, e sia $V$ il sottospazio avente come rappresentazione cartesiana il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} 7x-y-z=0\\ 13x-2y-z=0.\end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $V$, si vede che $V$ ammette come base il vettore $(1,6,1)$. Quindi $U+V$ ammette come base $(1,1,5)$, $(1,6,1)$. Per cui il generico vettore $(x,y,z)$ di $\mathbf{R}^3$ appartiene ad $U+V$ se e solo se:

$$det\begin{bmatrix}1&1&x\\1&6&y\\5&1&z\end{bmatrix}=0.$$

Cioè se e solo se $29x-4y-5z=0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U+V$. ■

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 7 dicembre 2007.

**Esercizio 1.** *Sia $V$ l'insieme di tutte le coppie di numeri reali. Si definisca la somma "$+$" in $V$ come in $\mathbf{R}^2$, e la moltiplicazione esterna "$\cdot$" al seguente modo: $a\cdot(x_1,x_2):=(ax_2,ax_1)$. Dire se $V$, con le operazioni appena definite, è uno spazio vettoriale, oppure no.*

*Svolgimento.* No, perché non è soddisfatta la proprietà secondo cui deve essere, per ogni $\mathbf{u} \in V$, $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Infatti, consideriamo la coppia $\mathbf{u} := (1,2)$. Allora, stante la definizione della nuova moltiplicazione esterna, si ha: $1 \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot (1,2) = (2,1) \neq \mathbf{u}$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $t \in \mathbf{R}$, calcolare il rango della seguente matrice $A_t$:*

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 & -1 \\ t & t+2 & 5 & -t-2 \\ t & 1 & t-2 & t-5 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, si perviene alla seguente matrice:

$$B_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 2 & -1 \\ 0 & t+1 & 3 & -t-1 \\ 0 & 0 & t-4 & t-4 \end{bmatrix}.$$

Se $t \notin \{-1,0,4\}$, allora $B_t$ è a scala, con 3 righe non nulle. Quindi il rango di $A_t$ è 3. Per i casi rimanenti, un calcolo a parte prova che il rango di $A_t$ è ancora 3 se $t \in \{-1,0\}$, mentre il rango di $A_4$ è 2. In conclusione:

$$rk(A_t) = \begin{cases} 3 & \text{se } t \neq 4 \\ 2 & \text{se } t = 4\ . \end{cases} \quad ■$$

**Esercizio 3.** *Calcolare l'inversa della seguente matrice, e verificare che il risultato ottenuto è corretto:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Affiancando alla matrice $A$ la matrice unitaria, ed eseguendo, nell'ordine, le operazioni elementari: $e_{4,1}(-2)$, $e_{4,2}(2)$, $e_{3,4}(-3)$, $e_{2,4}(2)$, $e_{1,4}(2)$, $e_{1,2}(-1)$ si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'inversa di $A$ è la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Per verificare che il risultato è esatto, basta osservare che:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 4.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$ e $(2,7,-1)$. Sia $V$ il sottospazio generato dai vettori $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$ e $(1,3,3)$. Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U+V$ e $U \cap V$, e calcolare una rappresentazione cartesiana per $U$.*

*Svolgimento.* Disponendo i generatori di $U$ in riga, e riducendo a scala per righe, si ottiene la matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quindi una base per $U$ è formata dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$, e la dimensione di $U$ è 2. Con un calcolo analogo si vede che una base per $V$ è formata dai vettori $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$, e la dimensione di $V$ è 2. Il sottospazio $U+V$ è generato dai vettori $(1,3,0)$, $(0,1,-1)$, $(1,-3,0)$, $(0,2,1)$. Come prima, si vede che $dim(U+V) = 3$, quindi $U+V = \mathbf{R}^3$, ed una base per $U+V$ è la base canonica. Per la formula di Grassmann $dim(U \cap V) = 1$. Per ottenere una base di $U \cap V$, è sufficiente calcolarne un vettore non nullo $\mathbf{w}$. Per un tale vettore devono esistere pesi $x, y, z, t$ non tutti nulli tali che:

$$\mathbf{w} = x(1,3,0) + y(0,1,-1) = z(1,-3,0) + t(0,2,1),$$

cioè tali che:

$$\begin{cases} x = z \\ 3x + y = -3z + 2t \\ -y = t. \end{cases}$$

Una soluzione non nulla di tale sistema è $(x, y, z, t) = (1, -2, 1, 2)$. Quindi una base per $U \cap V$ è data dal vettore $\mathbf{w} := (1, 1, 2)$. Una rappresentazione cartesiana per $U$ si ottiene imponendo che il generico vettore $(x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ sia linearmente dipendente da $(1, -3, 0)$, $(0, 2, 1)$. Cioè che:

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ -3 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} = 0.$$

Il che equivale a dire che: $3x + y - 2z = 0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U$. ■

**Esercizio 5.** *Determinare una rappresentazione parametrica per le soluzioni del seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + 2y + 3z + 4t - u = -1 \\ 2x + 3y + 3z + 3t + 4u = 3 \\ x + 2y + 2z + 2t + 3u = 2 \\ x + y + 2z + 3t - 2u = -2 \\ x + y + z + t + u = 1. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema, si perviene al seguente sistema equivalente ad $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 1 \\ y + z + t + 2u = 1 \\ z + 2t - 3u = -3. \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{S}$ è compatibile, ed ammette $\infty^2$ soluzioni. Per descrivere parametricamente l'insieme $Sol(\mathcal{S})$ di tali soluzioni, possiamo assumere $t$ ed $u$ come variabili libere, e la rappresentazione parametrica cercata è:

$$(t, u) \in \mathbf{R}^2 \to (u, 4 + t - 5u, -3 - 2t + 3u, t, u) \in Sol(\mathcal{S}). \ ■$$

**Esercizio 6.** *L'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le condizioni $f(1,0,0) = (0,0,-2)$, $f(0,1,-2) = (2,2,-2)$, $f(0,-1,3) = (-2,-2,4)$.*

*a) Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

*b) Calcolare una base per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$.*

*c) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(1,0,1)$, $(2,2,4)$.*

*d) Trovare una base $\mathcal{B}$ tale che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale.*

*e) Provare che se un'applicazione lineare $f : U \to V$ è iniettiva e i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ di $U$ sono liberi, allora anche i vettori $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$ sono liberi.*

*Svolgimento.* *a*) Denotiamo con $\mathcal{C}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,1,-2)$, $(0,-1,3)$. Allora abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

*b*) $Im(f)$ è generato dalle colonne della matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, quindi una base per $Im(f)$ è costituita dai vettori $(0,0,1)$, $(1,1,1)$. Il nucleo di $f$ è rappresentato dal sistema $\begin{cases} y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$. Quindi una base per $Ker(f)$ è costituita dal vettore $(1,0,1)$.

*c*) Dei vettori assegnati, solo $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ appartengono a $Im(f)$, e solo $(1,0,1)$ appartiene ad $Ker(f)$.

*d*) Il polinomio caratteristico di $f$ è: $p_f(t) = -t(t-2)^2$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori 0 e 2. L'autospazio $V_0$ (che coincide con $Ker(f)$) ammette come base $(1,0,1)$, mentre l'autospazio $V_2$ ammette come base $(1,1,0)$, $(0,0,1)$. Allora la base cercata è $\mathcal{B} := \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$.

*e*) Sia $(x,y,z)$ una relazione per $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$. Allora, tenuto conto che $f$ è lineare, abbiamo:

$$\mathbf{0} = xf(\mathbf{u}_1) + yf(\mathbf{u}_2) + zf(\mathbf{u}_3) = f(x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3).$$

Quindi il vettore $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3$ appartiene al nucleo di $f$. Per ipotesi sappiamo che $f$ è iniettiva, quindi $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, e perciò $x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2 + z\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. Ancora per ipotesi, sappiamo che i vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ sono liberi. Ne consegue che $x = y = z = 0$. Pertanto abbiamo provato che una qualunque relazione $(x,y,z)$ per $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$ deve essere banale. Ciò significa proprio che i vettori $f(\mathbf{u}_1)$, $f(\mathbf{u}_2)$ e $f(\mathbf{u}_3)$ sono liberi. ■

## Geometria ed Algebra 1, appello straordinario, 10 luglio 2008.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(-1,-7,7,7)$, e sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare:* $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x - z - t = 0 \end{cases}$.

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, e $U+V$.*

*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U$, $V$, e $U+V$.*

*c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.*

*d) Determinare sottospazi $X$, $Y$ e $Z$ di $\mathbf{R}^4$ tali che: $U+V = U \oplus X$, $\mathbf{R}^4 = U \oplus Y$, e $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus Z$. Dire se il sottospazio $X$ può essere determinato in modo tale che $dim(X) = 2$.*

*e) Siano $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ tre vettori di $\mathbf{R}^4$ linearmente indipendenti. Provare che se $\mathbf{b}$ è un vettore di $\mathbf{R}^4$ non appartenente a $Span(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, allora i vettori $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}$ formano una base per $\mathbf{R}^4$.*

*Svolgimento.* *a*) Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si vede che $(-1,-7,7,7)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$ formano una base per $U$, e la dimensione di $U$ è 2. Invece per ottenere una base di $V$, andiamo a risolvere il sistema che rappresenta $V$. Si deduce che una rappresentazione parametrica di $V$ è data dalla funzione: $(z,t) \in \mathbf{R}^2 \to (z+t, 4z+5t, z, t) \in V$. Quindi $V$ ha dimensione 2, ed una base per $V$ è data dai vettori $(1,4,1,0)$, $(1,5,0,1)$. Riunendo la base per $U$ con la base per $V$, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$: $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(1,4,1,0)$, $(1,5,0,1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala senza effettuare scambi di riga, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è data dai vettori $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$, $(1,4,1,0)$.

*b*) Una rappresentazione cartesiana per $U$ si ottiene mettendo in colonna i due vettori che formano una base di $U$, aggiungendo la colonna $(x,y,z,t)^T$ del generico vettore di $\mathbf{R}^4$, riducendo a scala, ed imponendo che il rango della matrice sia 2. Si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U$: $\begin{cases} 7x - 2y - z = 0 \\ y + t = 0 \end{cases}$. Una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dal testo dell'esercizio. Infine, in modo analogo a quanto fatto per $U$, si ottiene la rappresentazione cartesiana per $U+V$, che è: $14x - 3y - 2z + t = 0$.

*c*) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di $U$ e le equazioni di $V$. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} 7x - 2y - z = 0 \\ y + t = 0 \\ 5x - y - z = 0 \\ x - z - t = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $t \in \mathbf{R} \to (\frac{-t}{2}, -t, \frac{-3t}{2}, t) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1,2,3,-2)$.

*d*) Poiché $\{(1,0,7,0),(-2,-7,0,7),(1,4,1,0)\}$ è una base per $U+V$, e $(1,0,7,0)$, $(-2,-7,0,7)$ formano una base di $U$, il sottospazio $X$ cercato è $X := Span((1,4,1,0))$. Inoltre dalla rappresentazione cartesiana di $U+V$ vediamo che $(1,0,0,0) \notin U+V$. Quindi possiamo assumere $Y := Span((1,4,1,0),(1,0,0,0))$ e $Z := Span((1,0,0,0))$. La risposta all'ultima domanda è no, perché altrimenti si avrebbe $dim(U+V)=4$.

*e*) È sufficiente provare che i quattro vettori sono linearmente indipendenti. Sia allora $(x,y,z,t)$ una loro relazione. Abbiamo $x\mathbf{b}_1+y\mathbf{b}_2+z\mathbf{b}_3+t\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Se il peso $t$ fosse non nullo, potremmo scrivere: $\mathbf{b}=-\frac{1}{t}(x\mathbf{b}_1+y\mathbf{b}_2+z\mathbf{b}_3)$. Ma ciò è in contrasto con il fatto che $\mathbf{b}\notin Span(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)$. Quindi deve essere $t=0$, e dunque anche $x=y=z=0$, in quanto i tre vettori $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ sono linearmente indipendenti. ■

**Esercizio 2.** *L'applicazione lineare* $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ *soddisfa le condizioni* $f(1,4,0)=(-1,-48,48)$, $f(1,3,0)=(-1,-36,36)$, $f(0,0,1)=(0,-14,14)$.

*a) Posto* $\mathcal{B}:=\{(1,4,0),(1,3,0),(0,0,1)\}$, *provare che* $\mathcal{B}$ *è una base di* $\mathbf{R}^3$.

*b) Denotata con* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$, *calcolare le seguenti matrici:* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

*c) Rappresentare* $f$ *in termini delle coordinate canoniche. Calcolare una base per* $Ker(f)$, *una per* $Im(f)$, *ed una rappresentazione cartesiana per* $Im(f)$. *Dire quali dei seguenti vettori appartiene a* $Ker(f)$ *oppure ad* $Im(f)$: $(0,0,1)$, $(8,-1,1)$, $(0,7,-6)$.

*d) Calcolare il polinomio caratteristico di* $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, *e le sue radici. Inoltre determinare una base* $\mathcal{A}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ *sia una matrice diagonale, e verificare che il risultato ottenuto è esatto.*

*e) Utilizzando il Teorema della dimensione, provare che se* $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *è un'applicazione lineare, allora* $f$ *è iniettiva se e solo se è suriettiva.*

*Svolgimento.* *a*) Disponendo in colonna i vettori assegnati, si forma una matrice $3\times 3$ con determinante non nullo. Ciò è sufficiente per dire che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

*b*) Ovviamente si ha $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})=M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=I$. Poi abbiamo:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}1&1&0\\4&3&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})=M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}=\begin{bmatrix}-3&1&0\\4&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-48&-36&-14\\48&36&14\end{bmatrix},$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)=M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)\cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-12&-14\\0&12&14\end{bmatrix},\quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f)=\begin{bmatrix}-45&-33&-14\\44&32&14\\48&36&14\end{bmatrix}.$$

*c*) Avendo calcolato $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ si ha $f(x,y,z)=(-x,-12y-14z,12y+14z)$. Questa è la rappresentazione di $f$ in termini delle coordinate canoniche. Una base per $Ker(f)$ è data da $(0,7,-6)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(1,0,0)$, $(0,-1,1)$. Una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$ è data dall'equazione: $y+z=0$. Il vettore $(0,7,-6)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(8,-1,1)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(0,0,1)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

*d*) Il polinomio caratteristico di $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t)=-t(t+1)(t-2)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-1,0,2$. L'autospazio $V_{-1}$ è generato da $(1,0,0)$, l'autospazio $V_0$ è generato da $(0,7,-6)$, e l'autospazio $V_2$ è generato da $(0,1,-1)$. La base cercata è $\mathcal{A}:=\{(1,0,0),(0,7,-6),(0,1,-1)\}$. Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con $P$ la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di $f$:

$$P^{-1}M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-6&-7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-12&-14\\0&12&14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&7&1\\0&-6&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

*e*) Supponiamo che $f$ sia iniettiva. Allora $Ker(f)=\{\mathbf{0}\}$. Poiché per il Teorema della dimensione si ha $dim(Ker(f))+dim(Im(f))=n$, allora $dim(Im(f))=n$, cioè $Im(f)=\mathbf{R}^n$, ed $f$ è suriettiva. Viceversa, supponiamo $f$ suriettiva. Allora $Im(f)=\mathbf{R}^n$, quindi $dim(Im(f))=n$. Sempre per il Teorema della dimensione segue che $dim(Ker(f))=0$, il che implica che $f$ è iniettiva. ■

**Esercizio 3.** *Al variare del parametro* $k\in\mathbf{R}$, *si consideri il seguente sistema lineare:*

$$\mathcal{S}_k:\begin{cases}2kx+(k+2)y+(k+4)z=k+5\\kx+(k+1)y+2z=3\\kx+y+z=1.\end{cases}$$

*a) Dire per quali valori di* $k$ *il sistema* $\mathcal{S}_k$ *è compatibile, e per quali non lo è.*

*b) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ sia compatibile, determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}_k$.*

*c) Nel caso in cui $\mathcal{S}_k$ ammetta infinite soluzioni, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_k$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*d) Al variare del parametro $k$, stabilire la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare associato.*

*e) Dire se è vero oppure no che se un sistema lineare è incompatibile, lo è anche il sistema omogeneo associato.*

*Svolgimento.* $a$) Eseguendo sulla matrice completa di $\mathcal{S}_k$ le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $e_{3,2}(-1)$, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Quindi il sistema $\mathcal{S}_k$ è compatibile se e solo se $k \neq 0$.

$b$) Se $k \notin \{-1, 0\}$, allora $\mathcal{S}_k$ ammette una sola soluzione data da $(-\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}, 1)$. Se $k = -1$, allora $\mathcal{S}_{-1}$ ammette $\infty^1$ soluzioni date da: $(-3+2z, z-2, z)$, $z \in \mathbf{R}$.

$c$) $(-3+2z, z-2, z) = (-3, -2, 0) + z(2, 1, 1)$.

$d$) Sia $U$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Da $(^*)$ deduciamo che:

$$dim(U) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \notin \{-1, 0\} \\ 1 & \text{se } k \in \{-1, 0\}. \end{cases}$$

$e$) È falso, perché un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile. ■

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 3 settembre 2008.

**Esercizio 1.** *Siano $U$ e $V$ i sottospazi di $\mathbf{R}^4$ rappresentati rispettivamente dai sistemi lineari:*

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z + t = 0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, e $U + V$.*

*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U + V$.*

*c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.*

*d) Determinare un sottospazio $W$ di $\mathbf{R}^4$ tale che: $\mathbf{R}^4 = (U + V) \oplus W$. Dire se il sottospazio $W$ può essere determinato in modo tale che $dim(W) = 2$.*

*e) Determinare i valori del parametro $h$ per i quali il sottospazio $W_h$ di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(h, -1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 3)$, $(-1, -2, 2, 4)$, coincide con $U$.*

*Svolgimento.* $a$) Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $U$, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U$: $(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (\frac{z-t}{2}, -z, z, t) \in U$. Quindi $dim(U) = 2$, ed una base per $U$ è data dai vettori: $(1, -2, 2, 0)$, $(-1, 0, 0, 2)$. Analogamente, si vede che la funzione $(z, t) \in \mathbf{R}^2 \to (z, -z, z, t) \in V$ è una rappresentazione parametrica di $V$. Dunque anche $dim(V) = 2$, ed una base per $V$ è data dai vettori: $(1, -1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Riunendo la base trovata di $U$ con quella di $V$, si ottiene un sistema di generatori per $U + V$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala per righe, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per cui $dim(U + V) = 3$, ed una base per $U + V$ è data dai vettori: $(1, -2, 2, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

$b$) Sia $(x, y, z, t)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$. Allora tale vettore appartiene ad $U + V$ se e solo se la matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -2 & 1 & 0 & y \\ 2 & -1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango $= 3$. Ciò equivale a dire che $det(A) = 0$, cioè che $y + z = 0$. Questa è la rappresentazione cartesiana cercata di $U + V$.

*c*) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di $U$ e le equazioni di $V$. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + 4y + 3z + t = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $t \in \mathbf{R} \to (-t, t, -t, t) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(-1, 1, -1, 1)$.

*d*) Basta porre $W := Span((0, 1, 0, 0))$. La risposta all'ultima domanda è no, perché altrimenti si avrebbe $dim(U + V) \oplus W = 5 \neq dim(\mathbf{R}^4)$.

*e*) Disponendo in riga i generatori di $W_h$, e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{bmatrix}.$$

Se $h \neq 0$ tale matrice ha rango 3, quindi $W_h$ ha dimensione 3, e allora non può essere $W_h = U$ perché $U$ ha dimensione 2. Se invece $h = 0$, allora $dim(W_0) = 2$, ed i suoi generatori soddisfano le equazioni di $U$. Quindi $W_0 \subseteq U$, e poiché $W_0$ e $U$ hanno la stessa dimensione, allora sono uguali. Quindi, in conclusione, $W_h = U$ se e solo se $h = 0$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $h$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_h$:*

$$\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + hy = 0 \\ 2x + (1 + h)y = h. \end{cases}$$

*a) Calcolare il rango della matrice incompleta $A_h$ e della matrice completa $B_h$ di $\mathcal{S}_h$.*
*b) Dire per quali valori di $h$ il sistema lineare $\mathcal{S}_h$ è compatibile.*
*c) Nei casi in cui $\mathcal{S}_h$ è compatibile, calcolarne le soluzioni.*
*d) Dire per quali valori di $h$ il sistema $\mathcal{S}_h$ è omogeneo.*
*e) Dire per quali valori di $h$ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_h)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_h$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.*

*Svolgimento.* *a*) Eseguendo sulla matrice completa del sistema lineare le operazioni elementari: $p_{1,2}$, $p_{2,3}$, $e_{2,1}(-2)$, $e_{3,1}(-h)$, $e_{3,2}(-(1 + h))$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 - h & h \\ 0 & 0 & -h(1 + h) \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(A_h) = \begin{cases} 2 & \text{se } h \neq 1 \\ 1 & \text{se } h = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad rk(B_h) = \begin{cases} 3 & \text{se } h \notin \{-1, 0, 1\} \\ 2 & \text{se } h \in \{-1, 0, 1\}. \end{cases}$$

*b*) Tenuto conto che $\mathcal{S}_h$ è compatibile se e solo se $A_h$ e $B_h$ hanno lo stesso rango, dall'analisi precedente segue che $\mathcal{S}_h$ è compatibile se e solo se $h \in \{-1, 0\}$.

*c*) Il sistema $\mathcal{S}_{-1}$ ammette un'unica soluzione data da $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ed anche il sistema $\mathcal{S}_0$ ammette un'unica soluzione, data da $(0, 0)$.

*d*) Il sistema $\mathcal{S}_h$ è omogeneo se e solo se tutti i suoi termini noti sono nulli. Questo avviene solo nel caso $h = 0$.

*e*) $Sol(\mathcal{S}_h)$ è vuoto per $h \notin \{-1, 0\}$, è sempre finito, non è mai infinito, ed è un sottospazio solo quando è omogeneo, cioè quando $h = 0$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{b}_1 = (3, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 1)$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita dalle condizioni $f(1, 0, 0) = -2(6\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 10\mathbf{b}_3)$, $f(0, 1, 0) = \mathbf{0}$, $f(0, 0, 1) = -f(1, 0, 0)$.*

*a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.*

*b) Calcolare una base per $Ker(f)$, una per $Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$.*

*c) Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(1,1,1)$, $(-1,-2,-2)$, $(-1,-2,2)$.*

*d) Calcolare il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e le sue radici. Inoltre determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e verificare che il risultato ottenuto è esatto.*

*e) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori di $\mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti. Dire se la funzione $f$ definita in precedenza trasforma $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in due vettori anch'essi linearmente indipendenti.*

*Svolgimento.* *a*) È evidente che $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = I$. Poi abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Inoltre dal testo sappiamo che $f(1,0,0) = -2(6\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2 - 10\mathbf{b}_3) = (4,8,8)$, $f(0,1,0) = (0,0,0)$ e $f(0,0,1) = (-4,-8,-8)$. Quindi sappiamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -24 & 0 & -12 \\ 16 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

*b*) Per rispondere a tale domanda, utilizziamo le coordinate rispetto alla base canonica, cioè utilizziamo la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. Quindi il nucleo consiste dei vettori tali che $x - z = 0$. Per cui una base per $Ker(f)$ è data dai vettori $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$. Invece $Im(f)$ è generata dal vettore $(1,2,2)$, che ne è una base. Una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dal sistema lineare omogeneo: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$.

*c*) Il vettore $(1,1,1)$ appartiene al nucleo, ma non all'immagine. Il vettore $(-1,-2,-2)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo. Il vettore $(-1,-2,2)$ non appartiene né all'immagine, né al nucleo.

*d*) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t^2(t+4)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-4$ e $0$. L'autospazio $V_{-4}$ è generato da $(1,2,2)$, mentre l'autospazio $V_0$ altro non è che il nucleo di $f$, che sappiamo essere generato da $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(0,1,0),(1,2,2)\}$. Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con $P$ la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di $f$:

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & -8 \\ 8 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

*e*) In generale non è vero. Infatti i vettori $\mathbf{u} := (1,0,0)$ e $\mathbf{v} := (0,1,0)$ sono linearmente indipendenti, ma $f(\mathbf{u})$ e $f(\mathbf{v})$ no, in quanto $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 18 settembre 2008.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,-1)$, $(3,4,3,1)$, e sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,1,0,1)$, $(3,4,2,1)$, $(5,6,2,3)$.*

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, e $U+V$.*

*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U$, $V$, e $U+V$.*

*c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.*

*d) Sia $W$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dal sistema lineare:*

$$\begin{cases} 4x - 2y - z - t = 0 \\ 7x - 4y - z - 2t = 0 \\ 11x - 6y - 2z - 3t = 0. \end{cases}$$

*Provare che $W = U$.*

*e) Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$ vettori di uno spazio vettoriale, tali che $\mathbf{u} = 3\mathbf{w}+\mathbf{t}$, e $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}+\mathbf{t}$. Provare che $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) = Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$.*

*Svolgimento.* *a*) Poiché $2(1,1,1,1) + (1,2,1,-1) = (3,4,3,1)$, allora $(3,4,3,1)$ è un generatore sovrabbondante per $U$. Quindi $U$ ha dimensione 2, ed una base per $U$ è costituita dai vettori $(1,1,1,1)$ e $(1,2,1,-1)$. In modo analogo si vede che $V$ ha dimensione 2, ed una base per $V$ è costituita dai vettori $(1,1,0,1)$ e $(3,4,2,1)$. Riunendo la base di $U$ con quella di $V$ si ottiene un sistema di generatori di $U+V$. Disponendo tali generatori in riga, e riducendo a scala, si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è costituita dai vettori: $(1,1,1,1)$, $(0,1,0,-2)$, $(0,0,1,0)$.

*b*) Sia $\mathbf{r} := (x,y,z,t)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^4$. Allora $\mathbf{r}$ appartiene ad $U$ se e solo se la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Riducendo a scala tale matrice, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 3x-2y-t \\ 0 & 0 & x-z \end{bmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 se e solo se le componenti di $\mathbf{r}$ soddisfano il sistema lineare: $\begin{cases} x-z=0 \\ 3x-2y-t=0 \end{cases}$. Allora questo sistema lineare è la rappresentazione cartesiana cercata di $U$. Analogamente si vede che una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dal sistema lineare: $\begin{cases} 2x-2y+z=0 \\ 3x-2y-t=0 \end{cases}$. Poiché l'equazione $3x-2y-t=0$ appartiene ad entrambe le rappresentazioni, e poiché $U+V$ ha dimensione 3, allora tale equazione è una rappresentazione cartesiana per $U+V$.

*c*) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di $U$ e le equazioni di $V$. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} x-z=0 \\ 3x-2y-t=0 \\ 2x-2y+z=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $z \in \mathbf{R} \to (z, \frac{3z}{2}, z, 0) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(2,3,2,0)$.

*d*) La matrice del sistema che rappresenta $W$ ha rango 2. Poiché $W$ ha dimensione pari al numero delle incognite, meno il rango del sistema che lo rappresenta, segue che $W$ ha dimensione 2. D'altra parte, i generatori di $U$ soddisfano tutte le equazioni che definiscono $W$. Quindi $U \subseteq W$. Poiché tali spazi hanno la stessa dimensione, allora $U = W$.

*e*) Poiché i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ dipendono linearmente da $\mathbf{w}$ e $\mathbf{t}$, allora $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) \subseteq Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. D'altra parte le formule assegnate si possono invertire, e si ottiene:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \text{e} \quad \mathbf{t} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}.$$

Quindi, per lo stesso motivo di prima, deve anche essere $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) \supseteq Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. In virtù della doppia inclusione, possiamo dire di aver provato che $Span(\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}) = Span(\{\mathbf{w},\mathbf{t}\})$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$:*

$$\begin{cases} x+\lambda y+z=\lambda \\ \lambda x+y-\lambda z=1 \\ x+y-z=1. \end{cases}$$

*a) Calcolare il rango della matrice incompleta $A_\lambda$ e della matrice completa $B_\lambda$ di $\mathcal{S}_\lambda$.*

*b) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile.*

*c) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, calcolarne le soluzioni.*

*d) Dire per quali valori di $\lambda$ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.*

*e) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*Svolgimento.* $a$) Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(A_\lambda) = rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

$b$) Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $A_\lambda$ e $B_\lambda$ hanno lo stesso rango, dall'analisi precedente segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile per ogni valore del parametro $\lambda$.

$c$) Quando $\lambda \neq 1$, allora il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ ammette un'unica soluzione data da $(0,1,0)$. Invece il sistema $\mathcal{S}_1$ ammette $\infty^1$ soluzioni date da: $(1-y, y, 0)$, al variare di $y \in \mathbf{R}$.

$d$) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ non è mai vuoto, è finito per $\lambda \neq 1$, è infinito solo per $\lambda = 1$, e non è mai un sottospazio.

$e$) Quando $\lambda \neq 1$, possiamo scrivere: $(0,1,0) = (0,1,0) + (0,0,0)$. Invece, quando $\lambda = 1$, possiamo scrivere $(1-y, y, 0) = (1,0,0) + y(-1,1,0)$. ■

**Esercizio 3.** *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0)$, $(0,2,1)$, $(0,1,1)$, e si denotino con $(x_1', x_2', x_3')^T$ le coordinate del generico vettore di $\mathbf{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che al generico vettore di coordinate $(x_1', x_2', x_3')^T$ associa il vettore di coordinate $(-3x_1'-6x_2'-4x_3', -x_1'-4x_2'-2x_3', 2x_1'+6x_2'+3x_3')^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

*a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le matrici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.*

*b) Calcolare la dimensione di $Ker(f)$ e di $Im(f)$. Dire se è vero oppure no che $\mathbf{R}^3 = Im(f)$.*

*c) Calcolare il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e le sue radici. Inoltre determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale.*

*d) Verificare che il risultato ottenuto nel punto precedente c) è esatto.*

*e) Dire se esistono vettori distinti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, dove $f$ è l'applicazione lineare definita in precedenza.*

*Svolgimento.* $a$) Dal testo dell'esercizio deduciamo che:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ procediamo nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -6 & -4 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$b$) Poiché il determinante di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è $-2 \neq 0$, allora $dim(Ker(f)) = 0$ e $dim(Im(f)) = 3$. In particolare $Im(f) = \mathbf{R}^3$.

$c$) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -(t+1)^2(t+2)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-2$ e $-1$. L'autospazio $V_{-2}$ è generato da $(2,0,-1)$, e l'autospazio $V_{-1}$ è generato dai vettori $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(2,0,-1), (1,-1,0), (1,0,-1)\}$.

$d$) Per verificare che il risultato è esatto, denotiamo con $P$ la matrice che si ottiene mettendo in colonna i vettori di $\mathcal{A}$, e andiamo a vedere che $P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P$ coincide con la matrice diagonale le cui entrate sulla diagonale principale sono gli autovaolri di $f$ (disposti in ordine corrispondente all'ordine con cui abbiamo disposto gli autovettori lungo le colonne di $P$):

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$e$) Poiché abbiamo visto che $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, allora $f$ è iniettiva. Quindi, per definizione, non esistono vettori distinti $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tali che $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$. ■

## Geometria ed Algebra 1, I appello, 18 novembre 2008.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(0,1,-1,0)$, $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, e sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ avente la seguente rappresentazione cartesiana:* $\begin{cases} 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$.

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, e $U+V$.*
*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U$, $V$, e $U+V$.*
*c) Calcolare una base e la dimensione per $U \cap V$.*
*d) Determinare sottospazi $X$, $Y$, $Z$ e $W$ di $\mathbf{R}^4$ tali che: $\mathbf{R}^4 = U \oplus X$, $U+V = U \oplus Y$, $\mathbf{R}^4 = (U+V) \oplus Z$, e $\mathbf{R}^4 = (U \cap V) \oplus W$.*
*e) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = Span((1,-2,-1,h),(h,-2,-1,1))$. Calcolare la dimensione di $W_h$, e determinare i valori di $h$ per cui si ha $W_h \subseteq V$, $W_h = V$, e $W_h \neq V$.*

*Svolgimento.* $a$) Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si vede che $(0,1,-1,0)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$ formano una base per $U$, e la dimensione di $U$ è 2. Invece per ottenere una base di $V$, andiamo a risolvere il sistema lineare omogeneo che rappresenta $V$. Riducendo a scala tale sistema, si ottiene il sistema in forma normale: $\begin{cases} 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$ (cioè l'equazione $2x+y=0$ è sovrabbondante). Si deduce che una rappresentazione parametrica di $V$ è data dalla funzione: $(y,t) \in \mathbf{R}^2 \to (-\frac{y}{2}, y, -t, t) \in V$. Quindi $V$ ha dimensione 2, ed una base per $V$ è data dai vettori $(-1,2,0,0)$, $(0,0,-1,1)$. Riunendo la base per $U$ con la base per $V$, otteniamo un sistema di generatori per $U+V$: $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, $(-1,2,0,0)$, $(0,0,-1,1)$. Disponendo in riga tali generatori, e riducendo a scala scambiando la terza riga con la quarta, si perviene alla seguente matrice a scala:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $U+V$ ha dimensione 3, ed una sua base è data dai vettori $(1,-1,-1,0)$, $(1,0,-2,0)$, $(0,0,-1,1)$.

$b$) Una rappresentazione cartesiana per $U$ si ottiene mettendo in colonna i due vettori che formano una base di $U$, aggiungendo la colonna $(x,y,z,t)^T$ del generico vettore di $\mathbf{R}^4$, riducendo a scala, ed imponendo che il rango della matrice sia 2. Si ottiene la seguente rappresentazione cartesiana di $U$: $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$. Una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dal testo dell'esercizio. Infine, in modo analogo a quanto fatto per $U$, si ottiene la rappresentazione cartesiana per $U+V$, che è: $2x+y+z+t=0$.

$c$) Una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ si ottiene considerando simultaneamente le equazioni di $U$ e le equazioni di $V$. Cioè una rappresentazione cartesiana per $U \cap V$ è:

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ t=0 \\ 2x+y-z-t=0 \\ z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema, si ottiene la seguente rappresentazione parametrica di $U \cap V$: $y \in \mathbf{R} \to (\frac{-y}{2}, y, 0, 0) \in U \cap V$. Quindi $U \cap V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1,-2,0,0)$.

$d$) Aggiungendo alle prime tre righe della matrice (1) il vettore $(0,0,0,1)$, si ottiene una matrice di rango 4. Quindi, se definiamo $X = Span((0,0,-1,1),(0,0,0,1))$, allora riunendo la base di $U$ formata dai vettori $(1,-1,-1,0)$ e $(0,1,-1,0)$, con la base $\{(0,0,-1,1),(0,0,0,1)\}$ di $X$, si ottiene una base di $\mathbf{R}^4$. Ciò equivale a dire che $\mathbf{R}^4 = U \oplus X$. Analogamente, possiamo porre $Y = Span((0,0,-1,1))$, $Z = Span((0,0,0,1))$, e $W = Span((0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

$e$) La dimensione di $W_h$ è data dal rango della matrice che si ottiene disponendo in riga i generatori assegnati. Il minore di tale matrice dato dalla sottomatrice $\begin{bmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2 se e solo se $h \notin \{-1,1\}$. Quindi la dimensione di $W_h$ è 2 se $h \notin \{-1,1\}$. Un calcolo a parte prova che anche $W_{-1}$ ha dimensione 2, mentre $W_1$ ha dimensione 1. In definitiva, la dimensione di $W_h$ è 2 se e solo se $h \neq 1$, ed è 1 per $h = 1$. Quando $h \neq 1$, allora $(1,-2,-1,h)$ non soddisfa le equazioni che definiscono $V$. Quindi se $h \neq 1$ $W_h$ non può essere contenuto in $V$, in particolare $W_h \neq V$. Quando $h = 1$ i generatori di $W_h$ soddisfano le equazioni di $V$, quindi $W_1 \subseteq V$, ma ancora $W_1 \neq V$ perché $W_1$ ha dimensione 1, mentre $V$ ha dimensione 2. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili $x, y, z, t$:*

$$\begin{cases} x - y + z + (\lambda^2 - 2)t = \lambda \\ -x + y - z + \lambda^2 t = \lambda + 2 \\ x - y + (\lambda + 2)z = 1 \\ x - y + z - t = -1. \end{cases}$$

*a) Calcolare il rango della matrice incompleta $A_\lambda$ e della matrice completa $B_\lambda$ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.*

*b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.*

*c) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer.*

*d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*e) Dire per quali valori di $\lambda$ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.*

*Svolgimento.* $a$) Dopo opportune operazioni elementari sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq -1 \\ 2 & \text{se } \lambda = -1 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{-1,1\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{-1,1\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $A_\lambda$ e $B_\lambda$ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq 1$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq -1$, e $rk(\mathcal{S}_{-1}) = 2$.

$b$) Se $\lambda \notin \{-1,1\}$, allora un sistema equivalente in forma normale è:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ (\lambda + 1)z + t = 2 \\ (\lambda^2 - 1)t = \lambda + 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, la variabile libera è $y$, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $y \in \mathbf{R} \to (y + \frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, y, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T \in Sol(\mathcal{S}_\lambda)$.

Se $\lambda = -1$, allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_{-1}$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x - y + z - t = -1 \\ t = 2. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^2$ soluzioni, le variabili libere sono $y$ e $z$, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_{-1})$ è: $(y,z)^T \in \mathbf{R}^2 \to (y - z + 1, y, z, 2)^T \in Sol(S_{-1})$.

$c$) $\mathcal{S}_\lambda$ non è mai un sistema di Cramer perche' ha sempre rango $< 4$.

$d$) Quando $\lambda \notin \{-1,1\}$ possiamo scrivere: $(y + \frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, y, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T = (\frac{-\lambda^2-\lambda+5}{\lambda^2-1}, 0, \frac{2\lambda-3}{\lambda^2-1}, \frac{1}{\lambda-1})^T + (y, y, 0, 0,)^T$. Invece nel caso $\lambda = -1$ possiamo scrivere: $(y - z + 1, y, z, 2)^T = (1, 0, 0, 2)^T + (y - z, y, z, 0)^T$.

$e$) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto e finito solo per $\lambda = 1$, è infinito per $\lambda \neq 1$, e non è mai un sottospazio. ■

**Esercizio 3.** *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,0,0), (0,1,2), (0,1,3)$, e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che trasforma il vettore $(1,0,0)$ in $(4,-2,0)$, il vettore $(0,1,2)$ in $(10,-5,-2)$, ed il vettore $(0,1,3)$ in $(10,-5,-3)$.*

*a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.*

*b) Rappresentare $f$ in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$.*

*c) Determinare una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(50,-20,0)$, $(2,-1,10)$, $(50,-20,7)$.*

*d) Calcolare gli autovalori di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale.*

*e) Dire se esiste una base $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.*

*Svolgimento.* $a$) Dai dati forniti dal testo, deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{e che} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 10 \\ -2 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 0 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$b$) Avendo calcolato $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ si ha $f(x,y,z) = (4x+10y, -2x-5y, -z)$. Questa è la rappresentazione di $f$ in termini delle coordinate canoniche. Una base per $Ker(f)$ è data da $(-5,2,0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(2,-1,0)$, $(0,0,-1)$.

$c$) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $2x+5y=0$, $z=0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $x+2y=0$. Il vettore $(50,-20,0)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(2,-1,10)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(50,-20,7)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

$d$) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t+1)^2$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-1, 0$. L'autospazio $V_{-1}$ è generato da $(2,-1,0)$ e da $(0,0,1)$. L'autospazio $V_0$ è il nucleo, quindi è generato da $(-5,2,0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(2,-1,0),(0,0,1),(-5,2,0)\}$.

$e$) Una tale base non esiste, perché la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ dovrebbe avere lo stesso polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, quindi gli stessi autovalori. Il che è impossibile, perché tra gli autovalori di $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ appare 4, che non è un autovalore per $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. ■

## Geometria ed Algebra 1, II appello, 12 febbraio 2009, (V. Di Gennaro).

**Esercizio 1.** *Siano $U$ e $V$ i sottospazi di $\mathbf{R}^3$ che ammettono le seguenti rappresentazioni cartesiane:*

$$U := \begin{cases} 3x - y - 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad V := \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U \cap V$, e $U+V$.*

*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.*

*c) Determinare un sottospazio $W$ di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, contenente $U$ ma non $V$.*

*d) Determinare sottospazi $X$, $Y$, $Z$ di $\mathbf{R}^3$ tali che: $U \oplus X = (U+V) \oplus Y = V \oplus Z$.*

*e) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio $W_h = Span((1,1+h,0),(1,h,1))$. Determinare i valori di $h$ per cui si ha $W_h = U+V$.*

*Svolgimento.* $a$) I vettori di $U$ sono le soluzioni del sistema lineare fornito dalla rappresentazione cartesiana di $U$. Risolvendo tale sistema, si vede che $U$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(1,1,1)$. Analogamente si vede che $V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(0,1,-1)$. Quindi una base per $U+V$ è formata dai vettori $(1,1,1)$ e $(0,1,-1)$, ed $U+V$ ha dimensione 2. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 0, ed una sua base è l'insieme vuoto.

$b$) Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix}$$

sia nullo. Quindi la rappresentazione cartesiana di $U+V$ è l'equazione $2x - y - z = 0$.

*c*) Il sottospazio $W$ definito dall'equazione $x - z = 0$ ha dimensione 2, contiene $U$, ma non contiene $V$ in quanto il vettore $(0, 1, -1)$ non soddisfa l'equazione di $W$.

*d*) Possiamo porre $X = V$, $Y = \{\mathbf{0}\}$, e $Z = U$.

*e*) Poiché $W_h$ ha dimensione 2 per ogni $h$, allora $W_h = U + V$ se e solo se la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1+h & 0 \\ 1 & h & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 2. Ciò avviene esattamente quando $h = 1$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili $x, y, z$:*

$$\begin{cases} x + y + (\lambda^2 - 4\lambda + 1)z = \lambda + 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

*a) Calcolare il rango della matrice incompleta $A_\lambda$ e della matrice completa $B_\lambda$ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.*

*b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.*

*c) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer.*

*d) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*e) Dire per quali valori di $\lambda$ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.*

*Svolgimento.* *a*) Dopo opportune operazioni elementari sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda & \lambda \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{se } \lambda = 0 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{0, 4\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{0, 4\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $A_\lambda$ e $B_\lambda$ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq 4$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq 0$, e $rk(\mathcal{S}_0) = 2$.

*b*) Se $\lambda \notin \{0, 4\}$, allora un sistema equivalente in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ (\lambda^2 - 4\lambda)z = \lambda. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^0$ soluzioni, non ci sono variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $Sol(S_\lambda) = \left\{(0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T\right\}$.

Se $\lambda = 0$, allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_0$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, una sola variabile libera, cioè $z$, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_0)$ è: $z \in \mathbf{R} \to (0, 1 - z, z)^T \in Sol(S_0)$.

*c*) $\mathcal{S}_\lambda$ è un sistema di Cramer se e solo se $\lambda \notin \{0, 4\}$.

*d*) Quando $\lambda \notin \{0, 4\}$ possiamo scrivere: $(0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T = (0, \frac{\lambda-5}{\lambda-4}, \frac{1}{\lambda-4})^T + (0, 0, 0)^T$. Invece nel caso $\lambda = 0$ possiamo scrivere: $(0, 1 - z, z)^T = (0, 1, 0)^T + (0, -z, z)^T$.

*e*) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto per $\lambda = 4$, è finito per $\lambda \notin \{0, 4\}$, infinito per $\lambda = 0$, e non è mai un sottospazio. ■

**Esercizio 3.** *Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 1), (0, 1, 3), (0, 1, 4)$, e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che trasforma il vettore $(1, 0, 1)$ in $(5, 0, 5)$, il vettore $(0, 1, 3)$ in $(-1, -32, 15)$, ed il vettore $(0, 1, 4)$ in $(0, -40, 20)$.*

*a) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, calcolare le seguenti matrici: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.*

*b) Rappresentare $f$ in termini delle coordinate canoniche, e calcolare $f(1,1,1)$. Inoltre calcolare una base per $Ker(f)$ ed una per $Im(f)$.*

*c) Determinare una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$, ed una per $Im(f)$. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a $Ker(f)$ oppure ad $Im(f)$: $(-5,-5,0)$, $(2,2,1)$, $(1,3,0)$.*

*d) Calcolare gli autovalori di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, e determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

*e) Denotata con $g:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo $g(x,y,z)=(x+y,2y,3z)$, calcolare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g\circ f)$.*

*Svolgimento.* $a$) Dai dati forniti dal testo, deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&3&4\end{bmatrix},\quad \text{e che}\quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix}5&-1&0\\0&-32&-40\\5&15&20\end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&4&-1\\-1&-3&1\end{bmatrix},\quad \text{e}\quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix}4&-4&1\\8&-8&-8\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

$b$) Avendo calcolato $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, possiamo dire che per ogni vettore $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ si ha $f(x,y,z)=(4x-4y+z,8x-8y-8z,5z)$. Questa è la rappresentazione di $f$ in termini delle coordinate canoniche. In particolare $f(1,1,1)=(1,-8,5)$. Una base per $Ker(f)$ è data da $(1,1,0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(1,2,0)$, $(1,0,1)$.

$c$) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $4x-4y+z=0$, $z=0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $2x-y-2z=0$. Il vettore $(-5,-5,0)$ appartiene al nucleo ma non all'immagine, il vettore $(2,2,1)$ appartiene all'immagine ma non al nucleo, ed il vettore $(1,3,0)$ non appartiene né al nucleo né all'immagine.

$d$) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t)=-t(t+4)(t-5)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-4,0,5$. L'autospazio $V_{-4}$ è generato da $(1,2,0)$. L'autospazio $V_0$ è il nucleo, quindi è generato da $(1,1,0)$. L'autospazio $V_5$ è generato da $(1,0,1)$. La base cercata è $\mathcal{A}:=\{(1,2,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{bmatrix}.$$

$e$) Abbiamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g\circ f)=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(g)\cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&-4&1\\8&-8&-8\\0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&-12&-7\\16&-16&-16\\0&0&15\end{bmatrix}.\quad\blacksquare$$

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 8 luglio 2009.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ che ammette la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y=0,\end{cases}$$

*e sia $V:=Span((1,1,1))$.*

*a) Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U\cap V$, e $U+V$.*

*b) Calcolare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.*

*c) Determinare l'equazione cartesiana di un sottospazio $W$ di $\mathbf{R}^3$, di dimensione 2, contenente $U$ ma non $V$.*

*d) Determinare sottospazi $X$, $Y$, $Z$ di $\mathbf{R}^3$ tali che: $\mathbf{R}^3=U\oplus X=(U+V)\oplus Y=V\oplus Z$.*

*e) Dimostrare che $U+V=Span((4,1,1),(5,-1,-1))$.*

*Svolgimento.* $a$) I vettori di $U$ sono le soluzioni del sistema lineare fornito dalla rappresentazione cartesiana di $U$. Risolvendo tale sistema, si vede che $U$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita dal vettore $(2,-1,-1)$. D'altra parte $V$ ha dimensione 1, ed una sua base è costituita proprio dal vettore $(1,1,1)$. Poiché i vettori $(2,-1,-1)$ e $(1,1,1)$ sono indipendenti allora formano una base per $U+V$, e la dimensione di $U+V$ è 2. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U \cap V$ ha dimensione 0, ed una sua base è l'insieme vuoto.

*b*) Una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix}$$

sia nullo. Quindi la rappresentazione cartesiana di $U+V$ è l'equazione $y-z=0$.

*c*) Il sottospazio $W$ definito dall'equazione $x+y+z=0$ ha dimensione 2, contiene $U$, ma non contiene $V$ in quanto il vettore $(1,1,1)$ non soddisfa l'equazione di $W$.

*d*) Possiamo porre $X = Z = Span((0,1,0),(0,0,1))$, ed $Y = Span((0,0,1))$.

*e*) Poiché $Span((4,1,1),(5,-1,-1))$ ha dimensione 2, per dimostrarne l'uguaglianza con $U+V$ è sufficiente provare che $Span((4,1,1),(5,-1,-1)) \subseteq U+V$. E ciò segue dal fatto che i generatori $(4,1,1),(5,-1,-1)$ soddisfano l'equazione di $U+V$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili $x,y,z$:*

$$\begin{cases} x+y+(\lambda^2-2)z = \lambda \\ x+2y-2z = 2 \\ x+y-\lambda^2 z = 2-\lambda. \end{cases}$$

*a) Calcolare il rango della matrice incompleta $A_\lambda$ e della matrice completa $B_\lambda$ di $\mathcal{S}_\lambda$, e dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso dire qual è il rango del sistema.*

*b) Nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne un sistema equivalente in forma normale, le variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.*

*c) Nel caso in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, rappresentare la generica soluzione di $\mathcal{S}_\lambda$ come la somma di una soluzione particolare con la generica soluzione del sistema omogeneo associato.*

*d) Denotato con $U_\lambda$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$, calcolare la dimensione ed una base per $U_\lambda$.*

*e) Dire per quali valori di $\lambda$ l'insieme $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ delle soluzioni di $\mathcal{S}_\lambda$ è: vuoto, finito, infinito, un sottospazio.*

*Svolgimento.* *a*) Dopo aver svolto, nell'ordine, le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$, $e_3(-\frac{1}{2})$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda^2-2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda^2 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che:

$$rk(B_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{se } \lambda = 1 \end{cases}, \quad \text{e} \quad rk(A_\lambda) = \begin{cases} 3 & \text{se } \lambda \notin \{-1,1\} \\ 2 & \text{se } \lambda \in \{-1,1\} \end{cases}.$$

Tenuto conto che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $A_\lambda$ e $B_\lambda$ hanno lo stesso rango, segue che $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile se e solo se $\lambda \neq -1$. In tal caso $rk(\mathcal{S}_\lambda) = 3$ se $\lambda \neq 1$, e $rk(\mathcal{S}_1) = 2$.

*b*) Se $\lambda \notin \{-1,1\}$ allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_\lambda$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x+y+(\lambda^2-2)z = \lambda \\ y-\lambda^2 z = 2-\lambda \\ (\lambda^2-1)z = \lambda-1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^0$ soluzioni, non ci sono variabili libere, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_\lambda)$ è: $Sol(S_\lambda) = \left\{(0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T\right\}$.

Se $\lambda = 1$ allora un sistema equivalente ad $\mathcal{S}_1$ in forma normale è:

$$\begin{cases} x+y-z = 1 \\ y-z = 1. \end{cases}$$

In tal caso il sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, una sola variabile libera, cioè $z$, ed una rappresentazione parametrica per $Sol(S_1)$ è: $z \in \mathbf{R} \to (0, 1+z, z)^T \in Sol(S_1)$.

*c*) Quando $\lambda \notin \{-1,1\}$ possiamo scrivere: $(0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T = (0, \frac{\lambda+2}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1})^T + (0,0,0)^T$. Invece nel caso $\lambda = 1$ possiamo scrivere: $(0, 1+z, z)^T = (0,1,0)^T + (0,z,z)^T$.

*d*) Per quanto visto nel punto precedente, quando $\lambda \notin \{-1,1\}$ allora $dim\, U_\lambda = 0$ ed una sua base è l'insieme vuoto. Quando $\lambda = 1$ allora $dim\, U_1 = 1$, ed una base per $U_1$ è fornita dal vettore $(0,1,1)$. Infine, quando $\lambda = -1$ allora il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_{-1}$ è equivalente al sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Cioè $U_{-1} = U_1$, per cui $dim\, U_{-1} = 1$, ed una base per $U_{-1}$ è fornita dal vettore $(0,1,1)$.

*e*) $Sol(\mathcal{S}_\lambda)$ è vuoto per $\lambda = -1$, è finito per $\lambda \notin \{-1,1\}$, infinito per $\lambda = 1$, e non è mai un sottospazio. ■

**Esercizio 3.** *Sia* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$f(x,y,z) = (-4x + 4y + z, -9x + 9y + z, -4x + 4y + z).$$

*a) Denotata con* $\mathcal{E}$ *la base canonica di* $\mathbf{R}^3$*, e con* $\mathcal{B}$ *la base formata dai vettori* $(1,1,0)$, $(1,2,0)$, $(0,0,1)$*, calcolare le seguenti matrici:* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$, $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f)$.

*b) Calcolare una base per* $Ker(f)$ *ed una per* $Im(f)$.

*c) Determinare una rappresentazione cartesiana per* $Ker(f)$*, ed una per* $Im(f)$*. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a* $Ker(f)$*:* $(5,-5,0)$, $(2,2,1)$, $(3,3,0)$*. Dire quali dei seguenti vettori appartiene a* $Im(f)$*:* $(-5,-5,0)$, $(2,2,2)$, $(0,3,0)$.

*d) Calcolare gli autovalori di* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$*, e determinare una base* $\mathcal{A}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *tale che* $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ *sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

*e) Sia* $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *un'applicazione lineare tale che* $Im(g) \subseteq Ker(f)$*. Come deve essere fatta la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f \circ g)$ *? Inoltre dire se g può essere suriettiva oppure no.*

*Svolgimento.* *a*) Dai dati forniti dal testo deduciamo che:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e che} \quad M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi abbiamo: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ed inoltre:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 4 & 1 \\ -9 & 9 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

*b*) Una base per $Ker(f)$ è data da $(1,1,0)$, mentre una base per $Im(f)$ è data dai vettori $(4,9,4)$, $(1,1,1)$.

*c*) Una rappresentazione cartesiana per $Ker(f)$ è data dal sistema formato dalle due equazioni $-4x + 4y + z = 0$, $-9x + 9y + z = 0$. Invece una rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ è data dall'equazione: $x - z = 0$. Tra i vettori $(5,-5,0)$, $(2,2,1)$, $(3,3,0)$ solo $(3,3,0)$ appartiene al nucleo, mentre tra i vettori $(-5,-5,0)$, $(2,2,2)$, $(0,3,0)$ appartengono all'immagine solo $(2,2,2)$ e $(0,3,0)$.

*d*) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t-1)(t-5)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $0, 1, 5$. L'autospazio $V_0$ è il nucleo di $f$, quindi è generato da $(1,1,0)$. L'autospazio $V_1$ è generato da $(1,1,1)$, e l'autospazio $V_5$ è generato da $(1,2,1)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,1,0), (1,1,1), (1,2,1)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

*e*) Deve essere la matrice nulla. Inoltre $g$ non può essere suriettiva, altrimenti $Im(g) = \mathbf{R}^3 = Ker(f)$, e ciò è impossibile in quanto $Ker(f)$ ha dimensione 1. ■

**Geometria ed Algebra 1, IV appello, 2 settembre 2009.**

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ che ammette la seguente rappresentazione cartesiana:*

$$\begin{cases} 2x+y+2z-3t=0 \\ x-y+z=0 \\ x+z-t=0. \end{cases}$$

*a) Determinare una base ed una rappresentazione cartesiana per un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ tale che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$.*
*b) Posto $W := Span((2,0,0,1),(-1,1,0,0),(0,1,-1,0))$, dimostrare che $U \subseteq W$. Dire se è vero oppure no che $U \supseteq W$.*

*Svolgimento.* $a$) Risolvendo il sistema lineare omogeneo assegnato che rappresenta $U$ si ottiene che una base per $U$ è formata dai vettori $(-1,0,1,0),(1,1,0,1)$. Disponendo in riga tali vettori e riducendo a scala si ottiene la matrice:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aggiungendo i vettori canonici $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ si forma una matrice $4\times 4$ di rango massimo. Quindi si può assumere $V := Span(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Inoltre $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è una base per $V$, ed una rappresentazione cartesiana di $V$ è fornita dal sistema: $\begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$

$b$) I vettori che generano $W$ sono linearmente indipendenti. Per cui la dimensione di $W$ è 3, ed una sua rappresentazione cartesiana si ottiene imponendo che il determinante della seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 1 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Cioè una rappresentazione cartesiana per $W$ è data dall'equazione $x+y+z-2t=0$. Poiché i generatori $(-1,0,1,0),(1,1,0,1)$ di $U$ soddisfano tale equazione, allora $U \subseteq W$. Infine non può essere $U \supseteq W$ in quanto $U$ ha dimensione 2 e $W$ ha dimensione 3. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili $x$ e $y$:*

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ -2x+y=2\lambda^2+7\lambda+4 \\ x+\lambda y=\lambda. \end{cases}$$

*a) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare assegnato è compatibile e, nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.*
*b) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(-\frac{1}{2},0)^T$, e per quali valori la soluzione $(0,1)^T$.*

*Svolgimento.* $a$) Eseguendo le operazioni elementari $e_{1,3}(-2)$, $e_{2,3}(2)$ sulla matrice completa $B_\lambda$ del sistema $\mathcal{S}_\lambda$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2\lambda-1 & -2\lambda-1 \\ 0 & 2\lambda+1 & 2\lambda^2+9\lambda+4 \\ 1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix},$$

da cui si deduce che il determinante di $B_\lambda$ è:

$$det(B_\lambda) = -(2\lambda+1)(2\lambda^2+7\lambda+3).$$

Quindi per $\lambda \notin \{-3,-\frac{1}{2}\}$ il rango di $B_\lambda$ è 3, e allora il sistema $\mathcal{S}_\lambda$ non è compatibile. Rimangono da esaminare i casi $\lambda=-3$ e $\lambda=-\frac{1}{2}$.

Se $\lambda=-3$ il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x-y=-1 \\ x-3y=-3. \end{cases}$$

Tale sistema ha un'unica soluzione data da $(0,1)^T$.

Se $\lambda = -\frac{1}{2}$ il sistema è equivalente all'equazione $2x - y = -1$. Tale sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, date da $(\frac{t-1}{2}, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$.

*b*) $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(-\frac{1}{2}, 0)^T$ solo quando $\lambda = -\frac{1}{2}$. Mentre ammette la soluzione $(0,1)^T$ solo per $\lambda \in \{-3, -\frac{1}{2}\}$. ■

**Esercizio 3.** *Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo:*

$$f(-1,1,1) = (0,-1,3), \quad f(1,-1,0) = (1,2,0), \quad f(0,1,-1) = (0,-3,-3).$$

*a) Rappresentare l'applicazione $f$ in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per il nucleo e l'immagine di $f$.*

*b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

*Svolgimento.* *a*) Cominciamo con l'osservare che i vettori $(-1,1,1)$, $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$ formano una base per $\mathbf{R}^3$. Denotiamo tale base con $\mathcal{B}$, e con $\mathcal{E}$ la base canonica. Allora il testo ci dice che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi deduciamo:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

e la rappresentazione richiesta è:

$$f(x,y,z) = (2x + y + z, -2y + z, 3z).$$

Poiché il rango di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è 3, allora il nucleo di $f$ è $\{\mathbf{0}\}$ (ed una sua base è l'insieme vuoto), mentre $Im(f) = \mathbf{R}^3$, ed una base di $Im(f)$ è $\mathcal{E}$.

*b*) Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -(t+2)(t-2)(t-3)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-2, 2, 3$. L'autospazio $V_{-2}$ è generato da $(1,-4,0)$, l'autospazio $V_2$ è generato da $(1,0,0)$, e l'autospazio $V_3$ è generato da $(6,1,5)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,-4,0), (1,0,0), (6,1,5)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad ■$$

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 16 settembre 2009.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,-3,2,5), (1,0,1,1), (1,1,0,-1)$, e sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall'equazione $x + y - z - 2t = 0$.*

*a) Calcolare una base per $U \cap V$.*

*b) Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, si consideri il sottospazio*

$$W_h := Span((1,1,0,h-1), (2h,0,0,h), (1,-1,2,3-2h)).$$

*Determinare tutti i valori del parametro $h$ per cui $W_h = U$. Determinare tutti i valori del parametro $h$ per cui $W_h = V$.*

*Svolgimento.* *a*) Si osservi che una base per $U$ è costituita dai vettori $(1,0,1,1), (1,1,0,-1)$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U$ si ottiene imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 1 & -1 & t \end{bmatrix}$$

abbia rango 2. Si deduce che $U$ è rappresentato dalle equazioni $x-y-z=0$, $x-2y-t=0$, e quindi una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è fornita dal seguente sistema lineare

$$U\cap V := \begin{cases} x-y-z=0 \\ x-2y-t=0 \\ x+y-z-2t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che una base per $U\cap V$ è data dal vettore $(3,1,2,1)$.

$b)$ I generatori di $W_h$ soddisfano le equazioni di $U$ solo quando $h=0$. Poiché la dimensione di $W_0=2$ ne consegue che $W_h=U$ se e solo se $h=0$. Analogamente, i generatori di $W_h$ soddisfano l'equazione di $V$ solo quando $h=2$. Poiché la dimensione di $W_2=3$, ne consegue che $W_h=V$ se e solo se $h=2$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $\lambda$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_\lambda$ nelle variabili $x,y,z$:*

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+3\lambda y+(3\lambda^2-2\lambda)z=3\lambda \\ x-y+(3\lambda^2-8\lambda-2)z=3\lambda^2-8\lambda-4. \end{cases}$$

*a) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema lineare assegnato è compatibile e, nei casi in cui $\mathcal{S}_\lambda$ è compatibile, determinarne una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni.*

*b) Dire per quali valori di $\lambda$ il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$ ammette la soluzione $(0,0,0)^T$, e per quali valori la soluzione $(6,4,-2)^T$.*

*Svolgimento.* $a)$ Eseguendo le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-1)$ sulla matrice completa del sistema $\mathcal{S}_\lambda$ si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3\lambda+1 & 3\lambda^2-2\lambda-1 & 3\lambda+1 \\ 0 & 0 & 3\lambda^2-8\lambda-3 & 3\lambda^2-8\lambda-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $\lambda\notin\{-\frac{1}{3},3\}$ allora il sistema ammette un'unica soluzione data da $(-\lambda,2-\lambda,1)^T$. Rimangono da esaminare i casi $\lambda=-\frac{1}{3}$ e $\lambda=3$.

Se $\lambda=-\frac{1}{3}$ il sistema è equivalente all'unica equazione $x-y+z=-1$. In tal caso il sistema ammette $\infty^2$ soluzioni date da $(h-k-1,h,k)^T$, al variare di $h$ e $k$ in $\mathbf{R}$.

Se $\lambda=3$ il sistema è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x-y+z=-1 \\ y+2z=1. \end{cases}$$

Tale sistema ammette $\infty^1$ soluzioni, date da $(-3t,-2t+1,t)^T$, $t\in\mathbf{R}$.

$b)$ Sia $\mathcal{S}^*_\lambda$ il sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$, e sia $U_\lambda := Sol(\mathcal{S}^*_\lambda)$ lo spazio delle sue soluzioni, che è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$. Osserviamo che $U_\lambda=\{\mathbf{0}\}$ se $\lambda\notin\{-\frac{1}{3},3\}$, $U_{-\frac{1}{3}}=Span((1,1,0)^T,(-1,0,1)^T)$ e $U_3=Span((-3,-2,1)^T)$. Quindi $(0,0,0)^T$ è soluzione del sistema omogeneo associato ad $\mathcal{S}_\lambda$ per ogni $\lambda\in\mathbf{R}$, e $(6,4,-2)^T$ appartiene soltanto ad $U_{-\frac{1}{3}}$ e ad $U_3$.

**Esercizio 3.** *Sia $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ l'applicazione tale che:*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

*dove $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbf{R}^3$ costituita dai vettori $(-1,1,-1)$, $(1,-1,0)$ e $(0,1,-1)$.*

*a) Rappresentare l'applicazione $f$ in termini delle coordinate canoniche, e calcolare una base per il nucleo e l'immagine di $f$.*

*b) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ sia una matrice diagonale, e calcolare tale matrice.*

*Svolgimento.* $a)$ Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Allora abbiamo:

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)=M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3})\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

e la rappresentazione richiesta è:

$$f(x,y,z) = (5x+y+z, z, -4z).$$

Il nucleo ammette come base $\{(1,-5,0)\}$, mentre $Im(f) = Span((1,0,0),(0,1,-4))$.

*b)* Il polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ è: $p(t) = -t(t+4)(t-5)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-4, 0, 5$. L'autospazio $V_{-4}$ è generato da $(1,3,-12)$, l'autospazio $V_0$ è generato da $(1,-5,0)$, e l'autospazio $V_5$ è generato da $(1,0,0)$. La base cercata è $\mathcal{A} := \{(1,3,-12),(1,-5,0),(1,0,0)\}$, e si ha:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

## Geometria ed Algebra 1, I appello, 25 novembre 2009.

**Esercizio 1.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$, $(2,1,-1)$, e sia $V$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ avente la seguente rappresentazione cartesiana: $x-2y+3z=0$. Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U+V$ ed $U\cap V$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U$, e riducendo a scala, si vede che $(2,1,-1)$ è sovrabbondante. Quindi i due vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$ formano una base per $U$ in quanto sono indipendenti, e la dimensione di $U$ è 2. Invece, per ottenere una base di $V$, andiamo a risolvere l'equazione $x-2y+3z=0$, e vediamo che il generico vettore di $V$ è del tipo $(2y-3z,y,z)$, con $y$ e $z$ variabili libere. Ne consegue che una base per $V$ è formata dai vettori $(2,1,0),(-3,0,1)$. Ora l'insieme dei vettori $(-4,1,1)$, $(-2,2,0)$, $(2,1,0),(-3,0,1)$ rappresenta un sistema di generatori per $U+V$. Come prima, disponendo in riga tali generatori e riducendo a scala, si vede che i primi tre vettori sono indipendenti. Quindi $U+V=\mathbf{R}^3$, e come base di $U+V$ possiamo considerare la base canonica. Dalla formula di Grassmann deduciamo che $U\cap V$ ha dimensione 1. Per calcolarne una base, prima determiniamo una rappresentazione cartesiana di $U$, imponendo che il rango della matrice

$$A := \begin{bmatrix} -4 & -2 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix}$$

sia 2. In questo caso ci si riduce ad imporre che $det(A)=0$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è data dall'equazione $x+y+3z=0$. A questo punto una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$ è data dal sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-2y+3z=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene che il vettore $(-3,0,1)$ forma una base per $U\cap V$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili $x,y,z$:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} x-y+(k+1)z = k-1 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+(k-1)y+(k+6)z = k-1. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema è compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.*

*Svolgimento.* Dopo aver eseguito le operazioni elementari $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$, $p_{2,3}$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & k+1 & k-1 \\ 0 & k+1 & 4-k & 1-k \\ 0 & 0 & 1-k & 1-k \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{-1, 1\}$ il sistema $\mathcal{S}(k)$ è un sistema di Cramer e pertanto ammette un'unica soluzione, data da

$$\left(-\frac{2k+5}{k+1}, -\frac{3}{k+1}, 1\right).$$

Restano da esaminare i casi $k = -1$ e $k = 1$.

Nel caso $k = -1$, dopo l'ulteriore operazione elementare $e_{3,2}(-\frac{2}{5})$, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$$

In tal caso allora il rango della matrice incompleta è 2, mentre quello della matrice completa è 3, ed il sistema $\mathcal{S}(-1)$ è incompatibile.

Nel caso $k = 1$ la matrice (*) diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il sistema $\mathcal{S}(1)$ è compatibile, di rango 2. Ammette pertanto $\infty^1$ soluzioni, corrispondenti alla variabile libera $z$, ed una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni $Sol(\mathcal{S}(1))$ di $\mathcal{S}(1)$ è data dalla funzione:

$$z \in \mathbf{R} \to (-\frac{7}{2}z, -\frac{3}{2}z, z) \in Sol(\mathcal{S}(1)). \ \blacksquare$$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tali che $a = -c$ e $b = -2a$. Dimostrare che $U$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, e determinare un sottospazio $W$ di $\mathcal{M}(2,2)$ tale che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus W$.*

*Svolgimento.* Per la definizione stessa di $U$, sappiamo che una matrice $A$ appartiene ad $U$ se e solo se esistono $a, d \in \mathbf{R}$ tali che $A = \begin{bmatrix} a & -2a \\ -a & d \end{bmatrix}$. In particolare

$$A = a\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne consegue che $U = Span\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Ciò prova che $U$ è un sottospazio di $\mathcal{M}(2,2)$, ed una base per $U$ è formata dalle matrici $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ora, tramite l'applicazione delle coordinate, identifichiamo la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con il vettore $(a, b, c, d)$ di $\mathbf{R}^4$. Il sottospazio $U$ corrisponde al sottospazio $\widetilde{U}$ di $\mathbf{R}^4$ generato da $(1, -2, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$. Aggiungendo a tali vettori i vettori canonici $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ si forma una base per tutto $\mathbf{R}^4$ in quanto la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Per cui, posto $\widetilde{W} = Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, si ha $\mathbf{R}^4 = \widetilde{U} \oplus \widetilde{W}$. Allora il sottospazio $W$ di $\mathcal{M}(2,2)$ cercato è:

$$W := Span\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right). \ \blacksquare$$

**Esercizio 3bis.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ generato dai polinomi $p(t) = 2 + 6t + t^2 + t^3$, $q(t) = 4 + 12t + 2t^2 + t^3$, $r(t) = 6 + 18t + 3t^2 + 2t^3$. Calcolare una base di $U$, e determinare un sottospazio $W$ di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ tale che $\mathbf{R}[t]_{\leq 3} = U \oplus W$.*

*Svolgimento.* Tramite l'applicazione delle coordinate, identifichiamo il generico polinomio $a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$ con il vettore $(a_0,a_1,a_2,a_3)$ di $\mathbf{R}^4$. Il sottospazio $U$ corrisponde al sottospazio $\widetilde{U}$ di $\mathbf{R}^4$ generato da $(2,6,1,1)$, $(4,12,2,1)$, $(6,18,3,2)$. Disponendo in riga tali vettori e riducendo a scala (senza scambi) si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il vettore $(6,18,3,2)$ è sovrabbondante, ed una base per $\widetilde{U}$ è formata dai vettori $(2,6,1,1)$, $(4,12,2,1)$. Ciò equivale a dire che $p(t)$ e $q(t)$ formano una base per $U$.

Poi, aggiungendo a $(2,6,1,1),(4,12,2,1)$ i vettori canonici $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ si forma una base per tutto $\mathbf{R}^4$ in quanto la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango 4. Per cui, posto $\widetilde{W} = Span(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, si ha $\mathbf{R}^4 = \widetilde{U} \oplus \widetilde{W}$. Allora il sottospazio $W$ di $\mathbf{R}[t]_{\leq 3}$ cercato è:

$$W := Span(t,t^2). \quad \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Determinare la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica dell'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, sapendo che $f(0,1,3)=(4,2,3)$, $f(0,0,1)=(1,1,1)$, e che il nucleo di $f$ ammette la seguente rappresentazione cartesiana*

$$Ker(f) := \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Dalla rappresentazione cartesiana del nucleo di $f$ deduciamo che $Ker(f)$ è generato dal vettore $(1,1,-2)$. Tale vettore, insieme a $(0,1,3)$ e $(0,0,1)$, forma una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$. E dai dati del problema deduciamo che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica. Quindi abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)\cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *Si consideri l'applicazione lineare $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (-3x+3y-3z, -3x+3y-3z, -3x+3y-3z).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica, una base di $Ker(f)$, una base di $Im(f)$, ed una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.*

*Svolgimento.* Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$, abbiamo:

$$A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di $f$ allora è rappresentato dall'equazione $x-y+z=0$, ed una sua base è data dai vettori $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$. L'immagine di $f$ è generata da $(1,1,1)$.

Per calcolare la matrice $P$, innanzitutto calcoliamo il polinomio caratteristico di $f$, che è $p_f(t) = -t^2(t+3)$. Pertanto lo spettro di $f$ è costituito dagli autovalori $-3$ e $0$. L'autospazio $V_{-3}$ è generato dal vettore $(1,1,1)$, mentre l'autospazio $V_0$ è il nucleo di $f$ che abbiamo visto essere generato dai vettori $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$. La matrice $P$ si ottiene disponendo in colonna i vettori appena calcolati:

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \ \blacksquare$$

**Geometria ed Algebra 1, II appello, 9 febbraio 2010.**

**Esercizio 1.** *Si considerino i sottospazi $U$ e $V$ di $\mathbf{R}^4$ definiti dalle seguenti rappresentazioni cartesiane:*

$$U := \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z - t = 0 \end{cases} \qquad V := \begin{cases} 2x + 2y + t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0. \end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione cartesiana di $U + V$, e dire se $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$ oppure no.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $U$ si vede che una base per $U$ è formata dai vettori $(-1,2,0,0)$, $(-2,0,2,2)$. In modo analogo si vede che una base per $V$ è formata dai vettori $(-2,2,2,0)$, $(-1,0,0,2)$. Disponendo in riga i quattro vettori trovati, e riducendo a scala la matrice ottenuta in tal modo, si vede che $U+V$ ha dimensione 3 ed ammette come base i vettori $(-1,2,0,0)$, $(-2,0,2,2)$, $(-2,2,2,0)$. In particolare non è vero che $\mathbf{R}^4 = U \oplus V$. La rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il generico vettore $(x,y,z,t)$ sia dipendente dai vettori della base di $U+V$ trovata, cioè imponendo che

$$det \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 0 & 2 & 2 & z \\ 0 & 2 & 0 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si trova la rappresentazione cercata che è $2x + y + z + t = 0$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili $x, y, z, t$:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} 2x + (k+4)y + (k+4)z + (k+4)t = k+2 \\ x + (k+3)y + (k+3)z + (k+3)t = k+1 \\ x + y + z + t = 1. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema è compatibile, ed in tal caso determinare una rappresentazione parametrica per l'insieme delle soluzioni di $\mathcal{S}(k)$.*

*Svolgimento.* Dopo aver eseguito le operazioni elementari $p_{1,3}$, $e_{2,1}(-1)$, $e_{3,1}(-2)$ sulle righe della matrice completa del sistema assegnato, si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+2 & k+2 & k+2 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k = -2$ il sistema non è compatibile. Quando invece $k \neq -2$ allora il sistema è compatibile ed ammette $\infty^2$ soluzioni. In tal caso la generica soluzione espressa in funzione delle variabili libere $z$ e $t$ è $(\frac{2}{k+2}, \frac{k}{k+2} - z - t, z, t)$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Sia $U$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici $A$ tali che $A^T = A$, e sia $V$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}(2,2)$ costituito dalle matrici $A$ tali che $A^T = -A$. Provare che $U$ e $V$ sono sottospazi di $\mathcal{M}(2,2)$ e che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus V$.*

*Svolgimento.* La generica matrice $A$ di $U$ è del tipo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Poiché

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

allora $U = Span(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$. Ciò prova che $U$ è un sottospazio, di dimensione 3. Analogamente, la generica matrice $A$ di $V$ è del tipo $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$. Per cui $V = Span(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$. Quindi $V$ è un sottospazio, di dimensione 1. Infine, poiché $dim(U) + dim(V) = 4$, per provare che $\mathcal{M}(2,2) = U \oplus V$ è sufficiente provare che $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. A tale proposito sia $A \in U \cap V$. Allora $A^T = A = -A$, quindi $2A = \mathbf{0}$, il che implica $A = \mathbf{0}$. ■

**Esercizio 4.** *Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la cui matrice rappresentativa rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è:*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

*dove $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,3,2),(0,2,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,3,2)\}$. Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base del nucleo di $f$, ed una base dell'immagine.*

*Svolgimento.* Si ha:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 12 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ si vede che il nucleo di $f$ ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(1,-6,-4)$. Infine, una base di $Im(f)$ è costituita dalle prime due colonne di $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$. ■

**Esercizio 5.** *Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita ponendo*

$$f(x,y,z) = (x - 2y + 3z, -2x - 2y + 6z, -2x - 2y + 6z).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica, ed una matrice invertibile $P$ tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale. Verificare che il risultato ottenuto è esatto.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica è:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $A$ è: $p_A(t) = -t(t-2)(t-3)$. Quindi lo spettro di $A$ è costituito dagli autovalori $0, 2, 3$. L'autospazio $V_0$ ammette come base $(1,2,1)$, l'autospazio $V_2$ ammette come base $(1,1,1)$ e l'autospazio $V_3$ ammette come base $(1,2,2)$. Allora la matrice cercata è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ed infatti

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \ ■$$

## Geometria ed Algebra 1, III appello, 14 luglio 2010.

**Esercizio 1.** *Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:*

$$U := Span((-5,1,1),(1,-2,1),(-3,0,1)) \quad e \quad V := Span((1,1,1),(-5,-2,1),(0,1,2)).$$

*Calcolare la dimensione, una base ed una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$.*

*Svolgimento.* Tra i generatori di $U$ il vettore $(-3,0,1)$ è sovrabbondante. Quindi una rappresentazione cartesiana di $U$ è data dall'equazione $det\begin{bmatrix} -5 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} = 0$, cioè dall'equazione $x+2y+3z=0$. Analogamente si vede che una rappresentazione cartesiana per $V$ è data dall'equazione $x-2y+z=0$. Quindi il sistema

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

fornisce una rappresentazione cartesiana per $U\cap V$. Risolvendo tale sistema si vede che $U\cap V$ ha dimensione 1, ed una base per $U\cap V$ è formata dal vettore $(4,1,-2)$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $h$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(h)$ nelle variabili $x,y$:*

$$\mathcal{S}(h) := \begin{cases} (h+2)x+(h+3)y = h \\ 2x+hy=0 \\ 2x+(1+h)y=h. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $h$ il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni.*

*Svolgimento.* Il determinante della matrice completa del sistema $\mathcal{S}(h)$ è uguale a $h^3-4h$. Quindi se $h\notin\{-2,0,2\}$ il sistema certamente non è compatibile. Un calcolo diretto prova che se $h=-2$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(-2,-2)$, se $h=0$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(0,0)$, e se $h=2$ il sistema ammette un'unica soluzione data dal vettore $(-2,2)$. ■

**Esercizio 3.** *Si consideri l'operatore lineare $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ definito ponendo*

$$f(x,y,z) := (-2y+2z, 2x-4y+2z, 2x-2y).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di $f$. Infine determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tali che $D=P^{-1}AP$.*

*Svolgimento.* La matrice $A=M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(1,1,1)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di $A$, per esempio $\{(0,2,2),(2,2,0)\}$. Il polinomio caratteristico di $f$ è $det(A-tI)=-t(t+2)^2$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-2$ e 0. L'autospazio $V_0$ è proprio il nucleo di $f$. Invece una base per l'autospazio $V_{-2}$ si ottiene risolvendo il sistema lineare $A\cdot\mathbf{x}=-2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per $V_{-2}$ è formata, per esempio, dai vettori $(1,1,0)$ e $(-1,0,1)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per $f$ è $\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,1)\}$. Le matrici cercate $D$ e $P$ sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 4.** *Si consideri l'operatore lineare $f:A\in\mathcal{M}(2,2)\to A^T\in\mathcal{M}(2,2)$. Calcolare la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathcal{M}(2,2)$, il polinomio caratteristico di $f$, e provare che $f$ è diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathcal{M}(2,2)$. Allora le coordinate della generica matrice $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{E}$ sono $[A]_{\mathcal{E}}=(x,y,z,w)^T$. E si ha anche $[A^T]_{\mathcal{E}}=(x,z,y,w)^T$. Per cui la matrice rappresentativa di $f$ è la matrice

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che il polinomio caratteristico è $p_f(t) = (t-1)^3(t+1)$. L'autospazio $V_1$ è costituito dalle matrici simmetriche, la cui rappresentazione cartesiana è $y = z$. Quindi $V_1$ ha dimensione 3. Ciò prova che $f$ è diagonalizzabile. ■

**Esercizio 5.** *Si consideri la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1,1,1),(1,2,1),(2,5,3)$, e sia $f$ l'operatore di $\mathbf{R}^3$ che al vettore di coordinate $(x_1', x_2', x_3')$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ associa il vettore di coordinate $(x_1'+x_3', x_2', x_1'+x_2')$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. Calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ed $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -5 \\ 19 & 1 & -14 \\ 11 & 0 & -7 \end{bmatrix}. \quad ■$$

## Geometria ed Algebra 1, IV appello, 1 settembre 2010.

**Esercizio 1.** *Si considerino i sottospazi $U$ e $V$ di $\mathbf{R}^4$, dove $U := Span((-2,1,-1,1),(1,0,-1,0))$ e $V$ è il sottospazio che ammette come rappresentazione cartesiana il seguente sistema lineare:*

$$\begin{cases} x+y+4z-t=0 \\ x+y+2z+t=0. \end{cases}$$

*Calcolare una base per $U \cap V$ ed una rappresentazione cartesiana di $U+V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema lineare che rappresenta $V$ si vede che $V$ è generato dai vettori $(-1,1,0,0)$ e $(-3,0,1,1)$. Ora, disponendo per riga i generatori di $U$ e di $V$ e riducendo a scala la matrice ottenuta in tal modo, si trova che i vettori $(1,-1,0,0)$, $(0,1,-1,0)$, $(0,0,2,-1)$ formano una base per $U+V$. Per cui una rappresentazione cartesiana di $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 2 & z \\ 0 & 0 & -1 & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Ne risulta che una rappresentazione cartesiana per $U+V$ è data dall'equazione $x+y+z+2t=0$.

Adesso andiamo a calcolare una base per $U \cap V$. Innanzitutto calcoliamo una rappresentazione cartesiana di $U$. Per fare ciò è sufficiente imporre che il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ -1 & 1 & z \\ 0 & -1 & t \end{bmatrix}$$

sia pari alla dimensione di $U$, cioè sia pari a 2. Riducendo a scala si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & x+3y+z \\ 0 & 0 & y-t \end{bmatrix}.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di $U$ è

$$\begin{cases} x+3y+z=0 \\ y-t=0. \end{cases}$$

Allora $U \cap V$ è rappresentato dal sistema lineare

$$\begin{cases} x+3y+z=0 \\ y-t=0 \\ x+y+4z-t=0 \\ x+y+2z+t=0. \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si deduce che una base di $U \cap V$ è costituita dal vettore $(-4,1,1,1)$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili $x, y, z$:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} x-y+(k+2)z=k \\ x-y+2z=0 \\ 2x+ky+5z=k. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni. Infine dire per quali valori di $k$ il vettore $(-5,-1,1)^T$ è una soluzione per $\mathcal{S}(k)$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa del sistema (senza imporre restrizioni al parametro $k$) si perviene alla matrice:

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & k+2 & 1 & k \\ 0 & 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

Quindi il determinante della matrice incompleta del sistema $\mathcal{S}(k)$ è uguale a $k(k+2)$. Se $k \notin \{-2,0\}$ il sistema ammette un'unica soluzione, che è $(-\frac{k+5}{k+2}, \frac{k-1}{k+2}, 1)$. Quando $k=-2$ dalla matrice $(*)$ si deduce che il rango della matrice incompleta è 2 mentre quello della matrice completa è 3. Quindi in tal caso il sistema non è compatibile. Se $k=0$ invece ci sono $\infty^1$ soluzioni che sono $(-5z,-z,2z)$, $z \in \mathbf{R}$. Quanto all'ultima domanda, se $(-5,-1,1)^T$ fosse una soluzione allora sostituendo nel sistema $\mathcal{S}(k)$ si avrebbe $-2=0$. Per cui, per ogni $k$, il vettore $(-5,-1,1)^T$ non è soluzione di $\mathcal{S}(k)$. ■.

**Esercizio 3.** *Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo*

$$f(x,y,z) := (-5x-y+5z, -9x-3y+11z, -5x-y+5z).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di $f$. Infine determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tali che $D = P^{-1}AP$.*

*Svolgimento.* La matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 5 \\ -9 & -3 & 11 \\ -5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(2,5,3)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di $A$, per esempio $\{(-5,-9,-5),(-1,-3,-1)\}$. Il polinomio caratteristico di $f$ è $det(A-tI) = -t(t+1)(t+2)$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-2$, $-1$ e $0$. L'autospazio $V_0$ è proprio il nucleo di $f$. Invece una base per l'autospazio $V_{-2}$ si ottiene risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per $V_{-2}$ è formata dal vettore $(1,2,1)$. Similmente si vede che una base per $V_{-1}$ è formata dal vettore $(1,1,1)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per $f$ è $\{(1,2,1),(1,1,1),(2,5,3)\}$. Le matrici cercate $D$ e $P$ sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 4.** *Si consideri la matrice $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, e siano $U$ e $V$ i sottospazi di $\mathcal{M}(2,2)$ definiti come segue.*

$$U := \{X \in \mathcal{M}(2,2) : A \cdot X = \mathbf{0}\} \quad e \quad V := \{Y \in \mathcal{M}(2,2) : Y \cdot A = \mathbf{0}\}.$$

*Calcolare una base e la dimensione per $U$, $V$, $U \cap V$, $U + V$.*

*Svolgimento.* Sia
$$X := \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$
la generica matrice $2 \times 2$. Allora $X \in U$ se e solo se $x + z = 0$ e $y + t = 0$. Quindi $U = Span(E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22})$, dove
$$\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
denota la base canonica di $\mathcal{M}(2, 2)$. In particolare $\{E_{11} - E_{21}, E_{12} - E_{22}\}$ è una base per $U$ ed $U$ ha dimensione 2. Similmente si prova che $V = Span(E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22})$, quindi $\{E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22}\}$ è una base per $V$ ed anche $V$ ha dimensione 2. Una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ è data dal sistema lineare
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x + y = 0 \\ z + t = 0. \end{cases}$$
Risolvendo tale sistema si vede che $U \cap V$ ha dimensione 1 ed una sua base è formata dal vettore
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Per la formula di Grassmann sappiamo allora che la dimensione di $U + V$ è 3, ed una sua base è formata dalle matrici:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Esercizio 5.** *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni:*
$$f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1) = (1, 0, 0) \quad ed \quad f(1, 0, 2) = (0, 1, 0).$$
*Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, una base per $Ker(f)$ ed una base per $Im(f)$.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 2)\}$. Allora abbiamo:
$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
In particolare una base per $Ker(f)$ è data dal vettore $(0, 1, 0)$, mentre una base per $Im(f)$ è formata dai vettori $(2, -1, 0)$ e $(-1, 1, 0)$. $\blacksquare$

## Geometria ed Algebra 1, V appello, 8 settembre 2010.

**Esercizio 1.** *I sottospazi $U$ e $V$ di $\mathbf{R}^4$ ammettono, rispettivamente, le seguenti rappresentazioni cartesiane:*
$$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \\ 4x - y + 5z - 7t = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 2y + 5z - 6t = 0 \\ 5x + y + 4z - 5t = 0 \\ 3x + 3z - 4t = 0. \end{cases}$$
*Trovare una base per $U$ e provare che $U = V$.*

*Svolgimento.* Risolvendo il sistema che rappresenta $U$ si vede che $\{(-1, 1, 1, 0), (4, -5, 0, 3)\}$ è una base per $U$, in particolare $U$ ha dimensione 2. Questi due vettori soddisfano le equazioni di $V$ quindi $U \subseteq V$. D'altra parte la matrice del sistema che rappresenta $V$ ha rango 2, quindi anche $V$ ha dimensione 2. Questo prova che $U = V$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$, si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}(k)$ nelle variabili $x, y, z, t$:*

$$\mathcal{S}(k) := \begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 2x + (k+1)y + (k+7)z + (k+5)t = k+3 \\ x + (k+2)y + (k+5)z + (k+4)t = k+2 \\ 3x + ky + (k+9)z + (k+6)t = k+4. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema è compatibile, ed in tal caso determinarne le soluzioni. Infine dire per quali valori di $k$ il vettore $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)^T$ è una soluzione per $\mathcal{S}(k)$.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa del sistema si perviene alla seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & k+3 & k+3 & k+3 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k = -3$ il sistema non è compatibile. Se $k \neq -3$ ci sono $\infty^2$ soluzioni, che si possono descrivere al seguente modo:

$$\left(\frac{2k+4}{k+3} - 3z - 2t, \frac{k+1}{k+3} - z - t, z, t\right), \quad z, t \in \mathbf{R}.$$

Se il vettore assegnato è soluzione per $\mathcal{S}(k)$ allora nella rappresentazione precedente deve essere $z = t = 0$, e $k = 0$. ■

**Esercizio 3.** *Si consideri l'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito ponendo*

$$f(x, y, z) := (6x - 2y - 4z, 8x - 4y - 4z, 8x - 2y - 6z).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $A$ di $f$ rispetto alla base canonica, una base per $Ker(f)$, una base per $Im(f)$, ed una base di autovettori di $f$. Infine determinare una matrice diagonale $D$ ed una matrice invertibile $P$ tali che $D = P^{-1}AP$.*

*Svolgimento.* La matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ che rappresenta $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 8 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, si vede che $Ker(f)$ ha dimensione 1 ed ammette come base il vettore $(1, 1, 1)$. Quindi $Im(f)$ ha dimensione 2 ed una base è costituita da due colonne linearmente indipendenti di $A$, per esempio $\{(6, 8, 8), (2, 4, 2)\}$. Il polinomio caratteristico di $f$ è $det(A - tI) = -t(t+2)^2$. Quindi gli autovalori di $f$ sono $-2$ e 0. L'autospazio $V_0$ è proprio il nucleo di $f$. Invece una base per l'autospazio $V_{-2}$ si ottiene risolvendo il sistema lineare $A \cdot \mathbf{x} = -2\mathbf{x}$. Si deduce che una base per $V_{-2}$ è formata, per esempio, dai vettori $(1, 4, 0)$ e $(1, 0, 2)$. E allora una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori per $f$ è $\{(1, 4, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1)\}$. Le matrici cercate $D$ e $P$ sono:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 4.** *Dire per quali valori del parametro $k$ la matrice*

$$A(k) := \begin{bmatrix} 3k+7 & -k-3 \\ 9k+27 & -3k-11 \end{bmatrix}$$

*è diagonalizzabile.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico di $A(k)$ è $p(t) = (t+2)^2$ (si osservi che è indipendente dal parametro $k$). Quindi $A(k)$ è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di $-2$ è 2. Ora abbiamo:

$$m_g(-2) = 2 - rk \begin{bmatrix} 3k+9 & -k-3 \\ 9k+27 & -3k-9 \end{bmatrix} = 2 - rk \left( (k+3) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -3 \\ 1 & \text{se } k \neq -3. \end{cases}$$

In conclusione $A(k)$ è diagonalizzabile se e solo se $k = -3$. ■

**Esercizio 5.** *L'operatore lineare* $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *ha il nucleo rappresentato dall'equazione* $x - y + 5z = 0$ *e soddisfa la condizione* $f(1,0,0) = (1,2,3)$. *Calcolare la matrice rappresentativa* $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ *di* $f$ *rispetto alla base canonica* $\mathcal{E}$, *una base per* $Ker(f)$ *ed una base per* $Im(f)$. *Infine dire se esiste un operatore* $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *tale che* $Ker(f) = Ker(g)$ *e tale che* $g(1,1,0) = (1,1,0)$.

*Svolgimento.* Dall'equazione che definisce il nucleo di $f$ deduciamo che i vettori $(1,1,0)$ e $(0,5,1)$ ne formano una base. Quindi $(1,2,3)$ forma una base per $Im(f)$. Ora osserviamo che se uniamo i vettori $(1,1,0)$ e $(0,5,1)$ con $(1,0,0)$ si ottiene una base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$, e per i dati che disponiamo possiamo dire che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

dove $\mathcal{E}$ denota la base canonica. Quindi:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} == \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 10 \\ 3 & -3 & 15 \end{bmatrix}.$$

Infine è chiaro che l'operatore $g$ non esiste. Infatti altrimenti dovrebbe essere $g(1,1,0) = (0,0,0)$ (in quanto $Ker(g) = Ker(f)$). Ma ciò contraddice l'ipotesi. ■

## Geometria (9 CFU), I appello, 4 febbraio 2011, (V. Di Gennaro).

**Esercizio 1.** *Si considerino gli operatori lineari* $f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \to A \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ *e* $g : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4 \to B \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$, *dove le matrici* $A$ *e* $B$ *sono definite ponendo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -1 & 11 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

*Dire se e' vero oppure no che* $\ker f = \ker g$.

*Svolgimento.* Poiche' e' possibile ridurre a scala per righe $A$ e $B$ alla stessa matrice

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora i sistemi lineari $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ hanno le stesse soluzioni (cioe' quelle del sistema $C \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$), e quindi e' vero che $\ker f = \ker g$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro* $k$ *in* $\mathbf{R}$, *si consideri il seguente sistema lineare* $\mathcal{S}_k$ *nelle variabili* $x, y, z$:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + (k+1)y = 1 \\ x + y + (k^2 - k - 1)z = k. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di* $k$ *il sistema lineare assegnato è compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2 - k & k \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{0,1\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' di Cramer ed ammette un'unica soluzione che e'

$$\frac{1}{k(k-1)}(2, k-2, k)^T.$$

Se $k = 0$ $\mathcal{S}_0$ ammette $\infty^1$ soluzioni $(1-y, y, 1)^T$, $y \in \mathbf{R}$. Se $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ e' incompatibile. ■

**Esercizio 3.** *L'operatore $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ soddisfa le seguenti condizioni*

$$f(1,2,0,0) = (0,1,-1,0),\ f(1,3,0,0) = (0,2,-2,0),$$

$$f(0,0,1,2) = (0,1,3,2),\ f(0,0,1,3) = (0,1,5,3).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, ed una base per il nucleo e l'immagine. Infine determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio $U := Ker(f) + Im(f)$.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^4$ formata dai vettori $(1,2,0,0)$, $(1,3,0,0)$, $(0,0,1,2)$, $(0,0,1,3)$. Allora abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^4}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deduciamo che una base del nucleo e' data dai vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, mentre una base dell'immagine e' data dai vettori $(0,1,-1,0)$, $(0,0,2,1)$. Riunendo tali basi si ottiene un sistema di generatori per $Ker(f) + Im(f)$, nel quale $(0,1,-1,0)$ e' sovrabbondante. Quindi i vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,2,1)$ formano una base per $Ker(f) + Im(f)$, ed una rappresentazione cartesiana per $Ker(f) + Im(f)$ si ottiene imponendo che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix} = 0.$$

Cioe' una rappresentazione cartesiana per $Ker(f) + Im(f)$ e' data dall'equazione $x - y - z + 2t = 0$. ■

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e' nilpotente con indice di nilpotenza 3. E si ha

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per $A$ e' data dai vettori $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(0,0,1)$. La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ e' allora:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3t - t^2 \\ -5t - t^2 \\ -t - t^2 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -3 - 2t$$

che' e' uguale a
$$-3y_1 + 2y_2 + y_3 = -3(1-3t-t^2) + 2(-5t-t^2) + (-t-t^2) = -3-2t.$$
Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori $(1,2,0)$, $(0,-1,1)$. Calcolare una base ortonormale di $U$ ed una base ortonormale di $U^\perp$. Poi calcolare le matrici rappresentative $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(p_U)$ e $M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(p_{U^\perp})$ degli operatori di proiezione ortogonale $p_U$ e $p_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica.*

*Svolgimento.* Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $(1,2,0)$, $(0,-1,1)$ deduciamo che i versori $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$ formano una base ortonormale di $U$. Osserviamo poi che $2x-y-z=0$ e' una rappresentazione cartesiana di $U$. Quindi una base ortonormale di $U^\perp$ e' formata dal versore $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$. In particolare
$$p_{U^\perp}(x,y,z) = \frac{2x-y-z}{6}(2,-1,-1).$$
Quindi
$$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(p_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Poiche'
$$p_U(x,y,z) = (x,y,z) - p_{U^\perp}(x,y,z),$$
si ha anche
$$M_\mathcal{E}^\mathcal{E}(p_U) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 6.** *Si consideri la forma quadratica $q(\mathbf{u})$ su $\mathbf{R}^3$ definita ponendo*
$$q(\mathbf{u}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2.$$
*Calcolare la matrice di Gram $G$ di $q$ rispetto alla base canonica, ed una matrice ortogonale $P$ tale che $P^{-1}GP$ sia diagonale. Poi calcolare $M := \max\{q(\mathbf{u}) : \|\mathbf{u}\| \leq 1\}$, e determinare i vettori $\mathbf{u}$ per cui $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ e $q(\mathbf{u}) = M$.*

*Svolgimento.* La matrice $G$ e'
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$
Il suo polinomio caratteristico e' $p_G(t) = -t(t-6)(t+6)$. Gli autospazi corrispondenti sono $V_6 = Span((1,1,1))$, $V_0 = Span((1,-1,0))$, $V_{-6} = Span((1,1,-2))$. Quindi la matrice ortogonale $P$ cercata e':
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},$$
il numero $M$ e' $M = 6$, ed i vettori $\mathbf{u}$ per cui $\|\mathbf{u}\| \leq 1$ e $q(\mathbf{u}) = 6$ sono i versori $\mathbf{u} = \pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. ■

## Geometria (9 CFU), II appello, 25 febbraio 2011, (V. Di Gennaro).

**Esercizio 1.** *Nello spazio dei polinomi $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ di grado al piu' 2 si considerino il sottoinsieme $A$ formato dai polinomi che si annullano in $t=-1$, ed il sottoinsieme $B$ formato dai polinomi che si annullano in $t=3$. Provare che $A$ e $B$ sono sottospazi di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$, e calcolare una base per $A$, una per $B$, ed una per $A \cap B$. Dire se e' vero oppure no che $\mathbf{R}[t]_{\leq 2} = A \oplus B$.*

*Svolgimento.* Sia $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ il generico polinomio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$. Allora $p(t)$ si annulla in $t=-1$ se e solo se $a_0 - a_1 + a_2 = 0$. Quindi $p(t)$ sta in $A$ se e solo se $p(t)$ e' del tipo $p(t) = (a_1 - a_2) + a_1t + a_2t^2$, con $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$. Cioe' $p(t) \in A$ se e solo se $p(t)$ e' della forma $p(t) = a_1(1+t) + a_2(-1+t^2)$. Questo equivale a dire che $A = Span(1+t, -1+t^2)$. Cio' prova che $A$ e' un sottospazio di $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$, e che $\{1+t, -1+t^2\}$ ne e' una base.

Similmente si prova che $B = Span(-3+t, -9+t^2)$ e che $\{1+t, -1+t^2\}$ e' una base per $B$. Poi osserviamo che il polinomio $(1+t)(t-3)$ sta in $A \cap B$. Cio' e' sufficiente per dire che $\mathbf{R}[t]_{\leq 2}$ non e' la somma diretta di $A$ e di $B$. Infine osserviamo che $1+t$ sta in $A$ ma non in $B$ e quindi $A \cap B \neq A$. Poiche' $A$ ha dimensione 2 ne deduciamo che $A \cap B$ ha dimensione 1 ed una sua base e' data da $\{-3-2t+t^2\}$. ■

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$ si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili $x, y$:*

$$\begin{cases} x + (2k-4)y = 2k+1 \\ x + (k-3)y = k+2 \\ x - 2y = k^2 - 3k + 5. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2k-4 & 2k+1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-2) \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \notin \{1, 2\}$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ non e' compatibile. Se invece $k = 1$ il sistema $\mathcal{S}_1$ ammette $\infty^1$ soluzioni date dai vettori $(2y+3, y)^T$, $y \in \mathbf{R}$. Infine se $k = 2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ ammette un'unica soluzione data dal vettore $(5, 1)^T$. ■

**Esercizio 3.** *L'operatore lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni*

$$f(1, -1, -2) = (6, -6, -12), \quad f(1, 1, 0) = f(2, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Poi determinare una base per il nucleo ed una per l'immagine, ed una rappresentazione cartesiana per $Im(f)$. Inoltre dire se $f$ e' diagonalizzabile, e se esiste un vettore $\mathbf{u}$ non nullo tale che $f(\mathbf{u}) = -6\mathbf{u}$.*

*Svolgimento.* I dati stessi, insieme al Teorema della dimesione, ci dicono che i vettori $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$ formano una base del nucleo, mentre una base dell'immagine e' data dal vettore $(1, -1, -2)$.

Denotiamo poi con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, -1, -2)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$. Allora abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^4}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ -2 & z \end{bmatrix}$$

abbia rango 1 si ottiene la rappresentazione cartesiana di $Im(f)$ che e'

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

L'operatore e' certamente diagonalizzabile perche'

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si deduce anche che lo spettro di $f$ e' $Spec(f) = \{6, 0\}$ e quindi non esiste alcun vettore $\mathbf{u}$ non nullo tale che $f(\mathbf{u}) = -6\mathbf{u}$. ■

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* La matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^2(t-2)$. L'autovalore nullo ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di $A$ e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una stringa di lunghezza 1 per l'autovalore 2 e' data dall'autovettore $(1, 1, 1)$. Occorre trovare una stringa di lunghezza 2 per l'autovalore 0. Per fare cio' innanzitutto calcoliamo una base per l'autospazio generalizzato $\widetilde{V}_0$. Sappiamo che $\widetilde{V}_0$ e' lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, cioe' del sistema

$$2x - y = 0.$$

Allora una base per $\widetilde{V}_0$ e' formata dai vettori $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$. Ora osserviamo che tale base e' anche una stringa. Infatti si ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque una base a stringhe per $A$ e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e la soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - 2t + 2e^{2t} \\ -2 - 4t + 2e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -2 + 4e^{2t}$$

che' e' uguale a

$$2y_1 - y_2 + y_3 = 2(-1 - 2t + 2e^{2t}) - (-2 - 4t + 2e^{2t}) + (-2 + 2e^{2t}) = -2 + 4e^{2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1, -2, 0, 0)$, $(2, -2, -2, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Calcolare una base ortonormale di $U$, una rappresentazione cartesiana di $U$, ed una base ortonormale di $U^\perp$. Poi calcolare le matrici rappresentative $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U)$ e $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp})$ degli operatori di proiezione ortogonale $p_U$ e $p_{U^\perp}$ rispetto alla base canonica.*

*Svolgimento.* Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori $(1, -2, 0, 0)$, $(2, -2, -2, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, deduciamo che i versori $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(2, 1, -5, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ formano una base ortonormale di $U$. Osserviamo poi che $2x + y + z = 0$ e' una rappresentazione cartesiana di $U$. Quindi una base ortonormale di $U^\perp$ e' formata dal versore $\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1, 0)$. In particolare

$$p_{U^\perp}(x, y, z, t) = \frac{2x + y + z}{6}(2, 1, 1, 0).$$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_{U^\perp}) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$p_U(x,y,z) = (x,y,z) - p_{U^\perp}(x,y,z),$$

si ha anche

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(p_U) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Esercizio 6.** *Si considerino le seguenti matrici*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Dire se e' vero oppure no che 1) $A$ e $B$ sono congruenti, 2) $A$ e $B$ sono simili, 3) esiste una matrice ortogonale $P$ tale che $B = P^TAP$. Rispondere alle stessa domanda per le coppie di matrici $A, C$ e $B, C$.*

*Svolgimento.* I polinomi caratteristici delle rispettive matrici sono:

$$p_A(t) = -t(t-4)(t+2), \quad p_B(t) = -t(t-1)(t+2), \quad p_C(t) = -t(t-4)(t+2).$$

Per il Teorema degli assi principali sappiamo che esistono matrici ortogonali $Q$, $R$, $S$ tali che

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ = R^{-1}CR, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S^{-1}BS.$$

Si deduce che le tre matrici hanno tutte lo stesso rango e lo stesso indice, quindi sono tutte congruenti tra loro.

Notiamo poi che poiche' $p_A(t) \neq p_B(t)$ allora $A$ e $B$ non sono simili. A maggior ragione non puo' esistere una matrice ortogonale $P$ tale che $B = P^TAP$ (cio' implicherebbe $B = P^{-1}AP$, cioe' che $A$ e $B$ sono simili). Per lo stesso motivo le matrici $B$ e $C$ non sono simili e non puo' esistere una matrice ortogonale $P$ tale che $C = P^TBP$.

Infine osserviamo che e' vero che esiste una matrice ortogonale $P$ tale che $C = P^TAP$: si puo' considerare la matrice $P := QR^{-1}$. $\blacksquare$

**Geometria (9 CFU), III appello, 27 giugno 2011, (V. Di Gennaro).**

**Esercizio 1.** *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ soddisfa le seguenti condizioni:*

$$f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3), \quad f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3).$$

*Calcolare la matrice rappresentativa $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, una base per il nucleo ker$(f)$ di $f$, ed una base per l'immagine im$(f)$ di $f$.*

*Svolgimento.* Poiche' $f(\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_3)$ allora la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ ha tutte le colonne uguali. Inoltre sappiamo che

$$4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) = 2f(\mathbf{e}_1).$$

Dunque $f(\mathbf{e}_1) = 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, e quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

In particolare il vettore $(1,1,1)$ forma una base per $\mathrm{im}(f)$, ed $\mathrm{im}(f)$ ha dimensione 1. Ne consegue allora che il nucleo ha dimensione 2, e poiche' i vettori $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ appartengono al nucleo, allora essi formano una base per $\ker(f)$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dall'equazione $x-2y+3z+t=0$, ed, al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $W_h$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(-1,1,h,3-3h)$, $(-1,0,0,1)$, $(-1,1,0,3)$. Determinare i valori di $h$ per i quali si ha $W_h = U$, $W_h \subseteq U$, $W_h \neq U$.*

*Svolgimento.* Cominciamo con l'osservare che i tre generatori di $W_h$ soddisfano l'equazione di $U$, quindi $W_h \subseteq U$ per ogni $h$. Poiche' $\dim(U) = 3$ allora $W_h = U$ se e solo se i tre generatori di $W_h$ sono liberi. Per analizzare questa proprieta' disponiamo in riga i generatori e riduciamo a scala. Si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & h & -3h \end{bmatrix}.$$

Quindi per ogni $h \neq 0$ si ha $W_h = U$, mentre $W_0 \neq U$. ■

**Esercizio 3.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$ si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili $x, y, z$:*

$$\begin{cases} 2x + 3y + (k-2)z = k+4 \\ x + 2y + (k-1)z = k+2 \\ 2x + 3y + (2k-4)z = 2k+3. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala per righe la matrice completa del sistema lineare assegnato si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & k-1 & k+2 \\ 0 & 1 & k & k \\ 0 & 0 & k-2 & k-1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $k \neq 2$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ ammette un'unica soluzione data da

$$\frac{1}{k-2}(4k-5, -k, k-1).$$

Se invece $k = 2$ il sistema $\mathcal{S}_2$ non ammette soluzioni. ■

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{e}_1,$$

dove $A$ e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale $e^{At}$ occorre calcolare la forma canonica di Jordan $J$ di $A$, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per $A$. La matrice $P$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora $A$ ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3$, e l'autovalore nullo ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di $A$ e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare una stringa di lunghezza 3 osserviamo che

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una stringa di lunghezza 3 e':

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e una base a stringhe per $A$ e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} - 2t + 1 \\ -\frac{t^2}{2} - 2t \\ t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -t - 2$$

che' e' uguale a

$$-2y_1 + 2y_2 - y_3 = -2(-\frac{t^2}{2} - 2t + 1) + 2(-\frac{t^2}{2} - 2t) - (t) = -t - 2.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 - x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Completare la seguente matrice a matrice ortogonale:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & * & * \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* Se denotiamo con $(x_1, x_2, x_3)^T$ la prima colonna di $P$ allora deve essere $\frac{2}{3} + x_3^2 = 1$, perche' tale colonna deve avere lunghezza 1. Quindi possiamo porre $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Le altre due colonne, dovendo essere ortogonali alla prima, devono soddisfare l'equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Lo spazio delle soluzioni di tale equazione e' generato dai vettori $(1,1,0)$, $(0,1,1)$. Ortonormalizzando tali vettori con l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene il completamento cercato::

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

**Esercizio 6.** *Si consideri il seguente operatore lineare*

$$f : (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \to (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

*Dimostrare che esiste un sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^3$ tale che $f = p_U$, cioe' tale che $f$ sia l'operatore di proiezione ortogonale su $U$.*

*Svolgimento.* Sappiamo che se esiste un tale spazio $U$ allora esso coincide con l'autospazio $V_1$ di $f$. La rappresentazione cartesiana di $V_1$ e'

$$x + y = 0.$$

Una base ortogonale di $V_1$ e' data dai vettori $(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Per concludere l'esercizio andiamo a verificare che

$$f(x, y, z) = p_{(1,-1,0)}(x, y, z) + p_{(0,0,1)}(x, y, z)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Ed infatti:

$$p_{(1,-1,0)}(x, y, z) + p_{(0,0,1)}(x, y, z) = \frac{x-y}{2}(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, z). \quad \blacksquare$$

**Geometria (9 CFU), IV appello, 18 luglio 2011, (V. Di Gennaro).**

**Esercizio 1.** *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $U_h$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori*

$$(1, 1, 1, 1),\ (-3h, h^2, -3h, -2h),\ (3h, 3h, -h^2, 2h),\ (0, h^2 + 3h, -h^2 - 3h, 0).$$

*Per ciascun $h$ determinare un sottospazio $V_h$ di $\mathbf{R}^4$ per cui $\mathbf{R}^4 = U_h \oplus V_h$.*

*Svolgimento.* Disponendo in riga i generatori di $U_h$ e riducendo a scala si perviene alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h^2+3h & 0 & h \\ 0 & 0 & -h^2-3h & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi se $h \notin \{-3, 0\}$ allora si puo' scegliere $V_h := Span(\mathbf{e}_4)$. Se $h = 0$ si puo' scegliere $V_0 := Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Se $h = -3$ si puo' scegliere $V_{-3} := Span(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $k$ in $\mathbf{R}$ si consideri il seguente sistema lineare $\mathcal{S}_k$ nelle variabili $x, y, z$:*

$$\begin{cases} x + 3y + (k+2)z = k + 4 \\ 2x + 5y + (k+2)z = 2k + 7 \\ x + y = 1 \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

*Dire per quali valori di $k$ il sistema lineare assegnato e' compatibile, ed in tal caso descriverne le soluzioni.*

*Svolgimento.* Riducendo a scala la matrice completa con opportune operazioni elementari, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che se $k \neq -1$ allora il sistema $\mathcal{S}_k$ e' incompatibile, mentre per $k = -1$ il sistema e' compatibile ed ammette un'unica soluzione data dal vettore numerico $(0, 1, 0)$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ possiede il vettore $(1, -1, 2)$ come autovettore relativo all'autovalore $\lambda = -1$, ed ha il nucleo generato dai vettori $(1, 0, 3)$, $(-2, 3, 0)$, $(-1, 3, 3)$, $(-2, 6, 6)$. Calcolare l'espressione esplicita di $f$ rispetto alle coordinate canoniche, una base per $\ker(f)$ ed una base per $\operatorname{im}(f)$.*

*Svolgimento.* Consideriamo la base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $(1, 0, 3)$, $(-2, 3, 0)$, $(1, -1, 2)$ (i primi due vettori formano una base per il nucleo di $f$). Allora sappiamo che

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(come al solito $\mathcal{E}$ denota la base canonica). Quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Percio' l'espressione esplicita di $f$ rispetto alle coordinate canoniche e':

$$f(x, y, z) = (3x + 2y - z, -3x - 2y + z, 6x + 4y - 2z).$$

Abbiamo gia' detto che una base per il nucleo di $f$ e' formata dai vettori $(1, 0, 3)$, $(-2, 3, 0)$, ed e' ovvio a questo punto che una base per $\text{im}(f)$ e' data dal vettore $(1, -1, 2)$. ■

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 9x_2 + x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{e}_1,$$

dove $A$ e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ -3 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale $e^{At}$ occorre calcolare la forma canonica di Jordan $J$ di $A$, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per $A$. La matrice $P$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora $A$ ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t + 2)^3$, e l'autovalore $-2$ ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di $A$ e'

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A + 2I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A+2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $(1, 0, 1)$ sta nel nucleo di $A + 2I$ ed e' indipendente dai due vettori precedenti. Quindi una base a stringhe per $A + 2I$, che e' anche una base a stringhe per $A$, e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -t \\ -3t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,0,0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = -2e^{-2t}$$

che' e' uguale a

$$-2y_1 = -2e^{-2t}.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = -2x_1$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Sia $U$ il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,0,1)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, e sia $p_U : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'operatore di proiezione ortogonale su $U$. Calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_U)$ di $p_U$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.*

*Svolgimento.* Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla base $(1,0,0,1)$, $(-1,0,1,0)$, $(-2,1,0,0)$ di $U$, si ottiene la seguente base ortogonale di $U$:

$$(1,0,0,1), \quad (-1,0,2,1), \quad (-2,3,-2,2).$$

Quindi se $(x,y,z,t)$ e' il generico vettore di $\mathbf{R}^4$ abbiamo

$$p_U(x,y,z,t) = p_{(1,0,0,1)}(x,y,z,t) + p_{(-1,0,2,1)}(x,y,z,t) + p_{(-2,3,-2,2)}(x,y,z,t)$$

$$= \frac{x+t}{2}(1,0,0,1) + \frac{-x+2z+t}{6}(-1,0,2,1) + \frac{-2x+3y-2z+2t}{21}(-2,3,-2,2)$$

$$= \frac{1}{7}(6x-2y-z+t, -2x+3y-2z+2t, -x-2y+6z+t, x+2y+z+6t).$$

In conclusione

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(p_U) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Esercizio 6.** *Si consideri la seguente matrice*

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Calcolare una matrice ortogonale $Q$ tale che $Q^T A^T A Q$ sia una matrice diagonale. Dedurne una decomposizione ai valori singolari per $A$, e la sua norma spettrale.*

*Svolgimento.* Innanzitutto calcoliamo

$$A^T A = \begin{bmatrix} 37 & -12 \\ -12 & 37 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di $A^T A$ e' $p_{A^T A}(t) = (t-49)(t-25)$. Quindi i valori singolari di $A$ sono $\sigma_1 = 7$ e $\sigma_2 = 5$. Possiamo gia' dire che la norma spettrale di $A$ e'

$$\|A\|_2 = 7.$$

Poi osserviamo che l'autospazio $V_{49}$ di $A^T A$ e' generato da $(-1,1)$, mentre $V_{25}$ e' generato da $(1,1)$. Quindi la matrice cercata $Q$ e'

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Ne consegue la decomposizione ai valori singolari:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad ■$$

**Geometria (9 CFU), V appello, 7 settembre 2011, (V. Di Gennaro).**

**Esercizio 1.** *Si consideri il sottospazio $U$ di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(15,4,2,3)$, $(10,2,1,2)$, $(5,0,0,1)$, $(5,2,1,1)$, ed il sottospazio $V$ rappresentato dal sistema lineare*

$$\begin{cases} x-y+2z+2t=0 \\ x-y+2z+t=0 \\ 2x-2y+4z+3t=0. \end{cases}$$

*Determinare una rappresentazione cartesiana per $U+V$.*

*Svolgimento.* I vettori $(5,0,0,1)$ e $(5,2,1,1)$ formano una base per $U$, mentre una base per $V$, ottenuta risolvendo il sistema lineare che rappresenta $V$, e' formata dai vettori $(1,1,0,0)$, $(-2,0,1,0)$. Quindi i vettori $(5,0,0,1)$, $(5,2,1,1)$, $(1,1,0,0)$ e $(-2,0,1,0)$ formano un sistema di generatori per $U+V$. Il vettore $(5,2,1,1)$ risulta sovrabbondante, ed i vettori $(5,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$ e $(-2,0,1,0)$ formano una base per $U+V$. Quindi una rappresentazione cartesiana per $U+V$ si ottiene imponendo che il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

sia nullo. Ne consegue che la rappresentazione cartesiana cercata e'

$$x-y+2z-5t=0. \quad \blacksquare$$

**Esercizio 2.** *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $f_h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare definito dalle seguenti condizioni:*

$$f_h(\mathbf{e}_1) = (1,2,-3), \quad f_h(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = (0,2,-h^2-2h), \quad f_h(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = (0,-h-2,0).$$

*Determinare i valori di $h$ per cui $\ker(f_h) \subseteq im(f_h)$, ed i valori di $h$ per cui il vettore $(1,2,0)$ appartiene ad $im(f_h)$. In quest'ultimo caso determinare i vettori $(x,y,z)$ tali che $f_h(x,y,z) = (1,2,0)$.*

*Svolgimento.* La matrice rappresentativa dell'operatore $f_h$ rispetto all base canonica e':

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & h+4 & 0 \\ -3 & -3 & h^2+2h-3 \end{bmatrix}.$$

Quindi un vettore $(x,y,z)$ e' tale che $f_h(x,y,z) = (1,2,0)$ se e solo se

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+(h+4)y=2 \\ -3x-3y+(h^2+2h-3)z=0. \end{cases}$$

La matrice completa di tale sistema lineare si ottiene affiancando alla matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_h)$ la colonna $(1,2,0)^T$. Riducendo a scala per righe, si perviene alla matrice

$$(*) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & h+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2+2h & 3 \end{bmatrix}.$$

Si deduce che $(1,2,0)$ appartiene ad $\mathrm{im}(f_h)$ se e solo se $h \neq -2, 0$. In tal caso c'e' un solo vettore per cui $f_h(x,y,z) = (1,2,0)$ ed e' il vettore

$$\frac{1}{h(h+2)^2}\left(h^3+4h^2+h-12, 6, 3h+6\right).$$

Inoltre, sempre dalla matrice $(*)$, deduciamo che se $h \neq -2, 0$ allora $\mathrm{im}(f_h)$ ha dimensione 3, cioe' $\mathrm{im}(f_h) = \mathbf{R}^3$, ed il nucleo ha dimensione 0. Quindi se $h \neq -2, 0$ allora $\ker(f_h) \subseteq \mathrm{im}(f_h)$.

Se $h=-2$ il nucleo e' generato dal vettore $(1,-1,0)$ che non appartiene ad $\mathrm{im}(f_{-2})$ in quanto $\mathrm{im}(f_{-2}) = Span((1,2,-3),(1,0,-3))$. Quindi $\ker(f_{-2})$ non e' contenuto in $\mathrm{im}(f_{-2})$. Similmente si prova che $\ker(f_0)$ non e' contenuto in $\mathrm{im}(f_0)$. $\blacksquare$

**Esercizio 3.** *Dire se esiste oppure no una matrice non nulla $A$ soddisfacente le due equazioni $A^4 = 9A^2$ e $A^3 = 7A^2 - 10A$. Rispondere alla stessa domanda quando le condizioni sono $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$.*

*Svolgimento.* Per ipotesi la matrice $A$ annulla simultaneamente i polinomi $p(t) = t^2(t-3)(t+3)$ e $q(t) = t(t-2)(t-5)$. Poiche' il polinomio minimo $m_A(t)$ di $A$ e' un fattote di entrambi tali polinomi, deduciamo che $m_A(t) = t$. Dunque $A$, annullando il polinomio $m_A(t) = t$, e' necessariamente la matrice nulla.

Nel caso che le condizioni siano $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$ allora $m_A(t)$ e' un fattore del polinomio $t^2$. Quindi in questo caso ci sono matrici non nulle che soddisfano le equazioni $A^4 = 9A^2$ e $A^4 = 7A^3 - 10A^2$. Per esempio la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 + 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dove $A$ e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale $e^{At}$ occorre calcolare la forma canonica di Jordan $J$ di $A$, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per $A$. La matrice $P$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora $A$ ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-2)^3$, e l'autovalore 2 ha molteplicita' geometrica 2. Quindi la forma canonica di Jordan di $A$ e'

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A - 2I$ di lunghezza 2 e' data da

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-2I} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre $(0, 0, 1)$ sta nel nucleo di $A - 2I$ ed e' indipendente dai due vettori precedenti. Quindi una base a stringhe per $A - 2I$, che e' anche una base a stringhe per $A$, e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1,1,1)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = e^{2t}(2t+3)$$

che' e' uguale a

$$2y_1 + y_2 = e^{2t}(2t+3).$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Sia $(\mathbf{R}^3, \phi)$ lo spazio pseudoeuclideo definito dalla forma quadratica*

$$q(\mathbf{u}) := x^2 + 2xy + 2y^2 - 2yz + 3z^2.$$

*Provare che $(\mathbf{R}^3, \phi)$ e' uno spazio euclideo, e calcolarne una base ortonormale. Infine, nello spazio euclideo $(\mathbf{R}^3, \phi)$, calcolare la decomposizione*

$$\mathbf{u} = p_V(\mathbf{u}) + p_{V^\perp}(\mathbf{u})$$

*dove $\mathbf{u} = (x,y,z)$ e' il generico vettore di $\mathbf{R}^3$, e $V$ e' il sottospazio rappresentato dall'equazione cartesiana $2x+y+5z = 0$.*

*Svolgimento.* La matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ di $\phi$ rispetto alla base canonica e'

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria $I$, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi lo spazio $(\mathbf{R}^3, \phi)$ ha indice 3 e percio' e' uno spazio euclideo. Inoltre il calcolo precedente ci dice che i vettori

$$(1,0,0),\ (-1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,1)$$

formano una base ortonormale per $(\mathbf{R}^3, \phi)$.

Adesso passiamo allo studio del sottospazio $V$. Cominciamo con l'osservare che $V$ e' generato dai vettori $(1,-2,0), (0,-5,1)$. Quindi il complemento ortogonale $V^\perp$ di $V$ in $(\mathbf{R}^3, \phi)$ ha dimensione 1 ed e' generato da un qualsiasi vettore $(x,y,z)$ non nullo tale che

$$\begin{cases} \phi((x,y,z),(1,-2,0)) = 0 \\ \phi((x,y,z),(0,-5,1)) = 0. \end{cases}$$

Cioe' tale che

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 5x + 11y - 8z = 0. \end{cases}$$

Percio'

$$V^\perp = Span((1,1,2)).$$

Quindi la proiezione ortogonale del generico vettore $(x,y,z)$ su $V^\perp$ e':

$$p_{V^\perp}(x,y,z) = \frac{\phi((x,y,z),(1,1,2))}{\phi((1,1,2),(1,1,2))}(1,1,2) = \frac{2x+y+5z}{13}(1,1,2).$$

Poiche' $p_V(x,y,z) = (x,y,z) - p_{V^\perp}(x,y,z)$, deduciamo la decomposizione cercata:

$$(x,y,z) = p_V(x,y,z) + p_{V^\perp}(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{13}(11x - y - 5z, -2x + 12y - 5z, -4x - 2y + 3z) + \frac{1}{13}(2x + y + 5z, 2x + y + 5z, 4x + 2y + 10z). \blacksquare$$

**Esercizio 6.** *L'operatore $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ e' autoaggiunto, ed ha l'autospazio $V_{-3}$ relativo all'autovalore $\lambda = -3$ rappresentato dall'equazione $x + y = 0$. Sapendo che $V_{-3} = im(f)$ calcolare la matrice rappresentativa $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di $f$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$, e l'espressione esplicita.*

*Svolgimento.* Una base per $V_{-3}$ e' data dai vettori $(1, -1, 0), (0, 0, 1)$. Poiche' $V_{-3} = \mathrm{im}(f)$, allora $\mathrm{im}(f)$ ha dimensione 2, e quindi per il Teorema della dimensione possiamo dire che il nucleo di $f$ ha dimensione 1. In particolare 0 e' un autovalore per $f$, e non ci possono essere altri autovalori, cioe' lo spettro di $f$ e' $\{0, -3\}$. Poiche' $f$ e' autoaggiunto, per il Teorema Spettrale sappiamo che $\mathbf{R}^3 = V_0 \perp V_{-3}$, quindi

$$\ker(f) = V_0 = V_{-3}^{\perp} = Span((1, 1, 0)).$$

Allora la matrice rappresentativa di $f$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ e'

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id_{\mathbf{R}^3}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbf{R}^3})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

In particolare l'espressione esplicita di $f$ e'

$$f(x, y, z) = (-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y, \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y, -3z). \quad \blacksquare$$

**Geometria (9 CFU), VI appello, 21 settembre 2011, (V. Di Gennaro).**

**Esercizio 1.** *Al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, sia $U_h \subseteq \mathbf{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori*

$$(1 - 2h, 2, 0, -1), (-h^2, 0, 1, 0), (1 - h, 1, 0, -1), (2 - 3h, 3, 0, -2).$$

*Dire per quali valori di $h$ esiste un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ di dimensione 2 tale che*

$$U_h \cap V = Span((2, 5, 1, 4)).$$

*Rispondere alla stessa domanda imponendo la condizione* $\dim V = 3$.

*Svolgimento.* Affinche' esista $V$ e' necessario che il vettore $(2, 5, 1, 4)$ appartenga ad $U_h$. Quindi innanzitutto andiamo a vedere per quali valori di $h$ si ha $(2, 5, 1, 4) \in U_h$. Per fare questo osserviamo che una rappresentazione cartesiana di $U_h$ e' fornita dall'equazione

$$U_h : x + hy + h^2 z + t = 0.$$

Quindi il vettore $(2, 5, 1, 4)$ appartiene ad $U_h$ se e solo se $h^2 + 5h + 6 = 0$, cioe' se e solo se $h \in \{-3, -2\}$. Adesso consideriamo un qualsiasi vettore non appartenente ad $U_h$, per esempio $(1, 0, 0, 0)$. Allora, quando $h \in \{-3, -2\}$, deve essere

$$U_h \cap Span((2, 5, 1, 4), (1, 0, 0, 0)) = Span((2, 5, 1, 4)).$$

Cio' prova che esiste un sottospazio $V \subseteq \mathbf{R}^4$ di dimensione 2 tale che $U_h \cap V = Span((2, 5, 1, 4))$ se e solo se $h \in \{-3, -2\}$: in tal caso sara' sufficiente prendere

$$V = Span((2, 5, 1, 4), (1, 0, 0, 0)).$$

Quanto all'ultima domanda, sia $V \subset \mathbf{R}^4$ un sottospazio di dimensione 3, e consideriamo $U_h + V$. Ora o $U_h + V \neq \mathbf{R}^4$, ed allora $U_h = V$ e quindi $U_h \cap V = V$, oppure $U_h + V = \mathbf{R}^4$, ed allora $\dim(U_h \cap V) = 2$. Quindi, nel caso di dimensione 3, non esiste alcun valore del parametro $h$. $\blacksquare$

**Esercizio 2.** *Per ogni vettore* $\mathbf{u}$ *di* $\mathbf{R}^3$*, siano* $\mathbf{x}$ *le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto alla base*

$$\mathcal{B} := \{(0,1,1),(0,1,2),(1,1,1)\}.$$

*Siano poi* $\mathbf{x}'$ *le coordinate di* $\mathbf{u}$ *rispetto ad una certa altra base* $\mathcal{B}'$*. Sapendo che*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = 2x_2 + 5x_3 \\ x_3' = x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

*determinare i vettori della base* $\mathcal{B}'$*.*

*Svolgimento.* Denotiamo con $\mathbf{b}_1'$, $\mathbf{b}_2'$, e $\mathbf{b}_3'$ i vettori della base $\mathcal{B}'$. Poiche' $\mathbf{b}_1'$ ha coordinate $(1,0,0)^T$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, allora abbiamo

$$\begin{cases} 1 = x_1 \\ 0 = 2x_2 + 5x_3 \\ 0 = x_2 + 3x_3, \end{cases}$$

da cui deduciamo che le coordinate di $\mathbf{b}_1'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(1,0,0)^T$. E quindi $\mathbf{b}_1' = (0,1,1)$. Similmente si vede che le coordinate di $\mathbf{b}_2'$ e di $\mathbf{b}_3'$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(0,3,-1)^T$ e $(0,-5,2)^T$. E quindi $\mathbf{b}_2' = (-1,2,5)$ e $\mathbf{b}_3' = (2,-3,-8)$. ∎

**Esercizio 3.** *Siano* $A$ *e* $B$ *matrici nilpotenti* $n \times n$ *tali che* $rk(A) = rk(B) = 11$*,* $rk(A^2) = rk(B^2) = 5$*, e* $rk(A^3) = rk(B^3) = 2$*. Dire se e' vero oppure no che* $A$ *e* $B$ *sono simili.*

*Svolgimento.* La risposta e' no. Per dimostrarlo, e' sufficiente provare che la forma canonica di Jordan $J$ di una matrice $A$ nilpotente $n \times n$ non e' determinata dalle condizioni $rk(A) = 11$, $rk(A^2) = 5$ e $rk(A^3) = 2$. Infatti $J$ potrebbe essere sia una matrice con indice di nilpotenza $p = 5$, che una matrice con indice di nilpotenza $p = 4$.

Nel primo caso $J$ e' costituita da un blocco di ordine 5, due di ordine 3, tre di ordine 2, ed $n-17$ blocchi di ordine 1, mentre nel secondo $J$ e' costituita da due blocchi di ordine 4, uno di ordine 3, tre di ordine 2, ed $n-17$ blocchi di ordine 1. ∎

**Esercizio 4.** *Utilizzando l'esponenziale di una matrice risolvere il seguente problema di Cauchy, e verificare che il risultato ottenuto sia esatto.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Sappiamo che la soluzione $\mathbf{y}(t)$ cercata e'

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove $A$ e' la matrice dei coefficienti dell'equazione

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per calcolare la matrice esponenziale $e^{At}$ occorre calcolare la forma canonica di Jordan $J$ di $A$, ed una base a stringhe $\mathcal{S}$ per $A$. La matrice $P$ che ha per colonne i vettori di $\mathcal{S}$ ci consentira' di calcolare la matrice esponenziale in quanto

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}.$$

Ora $A$ ha polinomio caratteristico $p_A(t) = -t^3$, e l'autovalore 0 ha molteplicita' geometrica 1. Quindi la forma canonica di Jordan di $A$ e'

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiche'

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

allora una 0-stringa per $A$ di lunghezza 3 e' data da

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base a stringhe per $A$ e' formata dalle colonne della matrice

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione cercata $\mathbf{y}(t)$ del problema di Cauchy assegnato e':

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{PJP^{-1}t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P \cdot e^{Jt} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ 2t + \frac{t^2}{2} \\ 3t + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esattezza del risultato osserviamo innanzitutto che $\mathbf{y}(0) = (1, 0, 0)^T$, il che verifica la condizione iniziale. Poi osserviamo che:

$$\dot{y}_1 = 1 + t$$

che' e' uguale a

$$y_1 - 3y_2 + 2y_3 = 1 + t.$$

Cio' verifica che la prima equazione $\dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3$ e' soddisfatta. Similmente si vede che sono soddisfatte le rimanenti due equazioni. ■

**Esercizio 5.** *Si consideri la seguente forma quadratica* $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *definita ponendo*

$$q(\mathbf{u}) := 3x^2 + 2xy + 4xz - y^2 + 2z^2.$$

*Provare che* $q$ *non e' definita positiva, mentre lo e' la sua restrizione* $q_{|U} : U \to \mathbf{R}$*, dove* $U$ *e' il sottospazio di* $\mathbf{R}^3$ *generato dai vettori* $(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$.

*Svolgimento.* La matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ di $q$ rispetto alla base canonica e'

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria $I$, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange (dopo aver eseguito le operazioni di scambio $p_{12}$ e $p^{12}$), si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi $q$ ha indice 2 e percio' non e' definita positiva. Se invece restringiamo $q$ su $U$, la matrice di Gram di $q_{|U}$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e'

$$G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(q_{|U}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

che e' definita positiva per il criterio dei minori principali. ■

**Esercizio 6.** *Determinare tutti i vettori* $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ *tali che*

$$x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0.$$

*Svolgimento.* Possiamo riguardare il polinomio a primo membro dell'equazione assegnata come una forma quadratica $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ con matrice di Gram $G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q)$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ data da

$$G_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Affiancando a tale matrice la matrice unitaria $I$, ed applicando l'algoritmo di Gauss-Lagrange, si perviene alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi se introduciamo le coordinate $(x', y', z')$ rispetto alla base $\mathcal{B} := \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$ avremo:

$$x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = {x'}^2 + 4{y'}^2.$$

In particolare $x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0$ se e solo se ${x'}^2 + 4{y'}^2 = 0$, cioe' se e solo se $x' = y' = 0$. Quindi tutti e soli i vettori $(x, y, z)$ di $\mathbf{R}^3$ per cui $x^2 - 2xy + 2xz + 5y^2 - 6yz + 2z^2 = 0$ sono i vettori multipli di $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
■