Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 3 febbraio 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Per rappresentare l' andamento del* raggio idraulico della capillarità*, si può usare la cosiddetta funzione* J-Leverett *[Bea72]*

$$J(S_w) = (p_c(S_w)/\sigma)\sqrt{k/n}, \tag{1}$$

dove S_w è il grado di saturazione del mezzo poroso, $p_c = p_c(S_w)$ la pressione capillare, σ la tensione di interfaccia, k la permeabilità del mezzo, n la porosità. Supponiamo che

$$p_c(S_w) = -\tan(\pi S_w/120 - \pi/2) + 4/10 = 2/5 + \cot(\pi\, S_w/120).$$

Ricordare che:

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad \tan(x - \pi/2) = -\cot(x), \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Sia $k = \sigma = n = 1$,

$$f(x) \equiv J(x).$$

Il dominio della funzione si può indicare come:

$$a < x < b, \quad x \notin S,$$

dove S *è un opprtuno insieme di punti da escludere.*

Domanda numero 1: *Quanto vale* a*?* *1A :* [ ]

Domanda numero 2: *Quanto vale* b*?* *2A :* [ ]

Domanda numero 3: *Qual è l' insieme* S*?*

Valore: 4.

Domanda numero 4: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to -\infty$*?*

4A : [ ] *Valore: 5.*

Domanda numero 5: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to +\infty$*?*

5A : [ ] *Valore: 5.*

La funzione è periodica.

Domanda numero 6: *Qual è il suo periodo* p*?*

$p =$ *6A :* [ ] *Valore: 5.*

Vogliamo analizzare il comportamento della funzione nell' intervallo $[0, p]$, **al quale ci limitiamo in tutta la rimanente parte del test**.

Studiare i limiti di $f(x)$ *nei punti* x_i *in cui non è definita. N.B.:*

$$\lim_{x \to x_i +} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i -} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 7: *Punti* x_i: $x_1 =$ *7A :* [ ], $L_1^- =$ *7B :* [ ], $L_1^+ =$ *7C :* [ ];

$x_2 =$ *7D :* [ ], $L_2^- =$ *7E :* [ ], $L_2^+ =$ *7F :* [ ].

Valore: 21.

Domanda numero 8: *Qual è la derivata di* $f(x)$*?*

Valore: 8.

Domanda numero 9: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile:* $x_1 =$ *9A :* , $f(x_1) =$ *9B :* ; $x_2 =$ *9C :* , $f(x_2) =$ *9D :* . *Valore: 8.*

Domanda numero 10: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo, "2" se è un flesso.* $x_1 =$ *10A :* ; $f(x_1) =$ *10B :* ; *Massimo o minimo?=* *10C :* ; $x_2 =$ *10D :* ; $f(x_2) =$ *10E :* ; *Massimo o minimo?=* *10F :* ; *Valore: 20.*

Domanda numero 11: *Punti di flesso x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$.* $x_1 =$ *11A :* ; $f(x_1) =$ *11B :* ; $x_2 =$ *11C :* ; $f(x_2) =$ *11D :* . *Valore: 16.*

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 12: *Asintoti:* $x_1 =$ *12A :* ; $a_1 =$ *12B :* ; $b_1 =$ *12C :* ; $c_1 =$ *12D :* ; $x_2 =$ *12E :* ; $a_2 =$ *12F :* ; $b_2 =$ *12G :* ; $c_2 =$ *12H :* .
Valore: 28.

Domanda numero 13: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 160.

Sia $q(x) = f(x)\, f'(x)$.
Domanda numero 14: *Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

Valore: 20.
Sia $a = 0$, $b = 10$, $c = 20$, $d = 60$.
Sia $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.
Domanda numero 15: *Quanto vale* $V(a, b)$*?* $V(a, b)=$
15A : $\boxed{}$; *Valore: 4.*
Domanda numero 16: *Quanto vale* $V(b, c)$*?* $V(b, c)=$
16A : $\boxed{}$; *Valore: 4.*
Domanda numero 17: *Quanto vale* $V(c, d)$*?* $V(c, d)=$
17A : $\boxed{}$. *Valore: 4.*

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

La funzione da studiare è:

$$f(x) = -\tan(\pi x/120 - \pi/2) + 4/10.$$

- Il dominio della funzione è $-\infty < x < +\infty$, $x \notin S$, $S = \{z : z = k \cdot 120, k \in \mathbb{Z}\}$.

- I limiti valgono:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \text{non esiste}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{non esiste}.$$

- La periodicità della funzione è $p = 120$. Nel seguito ci limitiamo all' intervallo $[0, p]$.

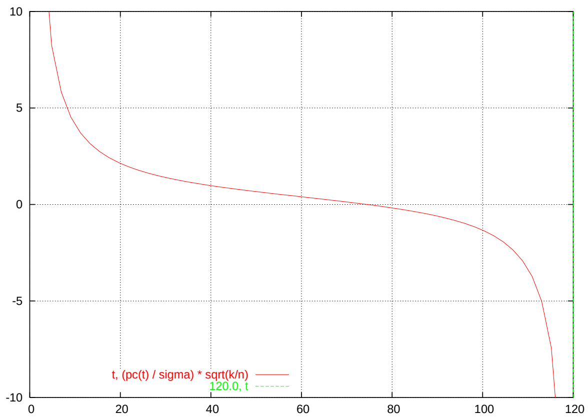
- La funzione non è definita nei punti $x_1 = 0$ e $x_2 = p$, e risulta

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to p-} f(x) = -\infty.$$

- La derivata è:

$$y'(x) = \frac{-\pi}{120} \csc^2(\frac{\pi\, x}{120}).$$

- La funzione è derivabile in tutti i punti in cui è continua.
- Non vi sono punti estremali.
- Vi è un unico punto di flesso $x = 60$, $f(60) = 4/10$.
- Gli asintoti sono le rette $x = 0$ e $x = 120$.
- Grafico della funzione:



- L' integrale indefinito di

$$q(x) = f(x)\, f'(x) = \frac{-\pi}{120} \left(\frac{2}{5} + \cot(\frac{\pi\, x}{120}) \right) \csc^2(\frac{\pi\, x}{120})$$

è

$$\int q(x)\mathrm{d}x = \{Q(x) + C,\, C \in \mathbb{R}\},$$

$$Q(x) = f(x)^2/2 = \frac{1}{10} \csc^2(\frac{\pi\, x}{120}) \left(5 + 2\, \sin(\frac{\pi\, x}{60}) \right).$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a, b) = -\infty;$$

$$V(b, c) = \frac{-4\, \left(606 + 379\, \sqrt{3} \right)}{555 + 145\, \sqrt{3}} \simeq -6.2641;$$

$$V(c, d) = \frac{90 + 83\, \sqrt{3}}{-20 - 50\, \sqrt{3}} \simeq -2.1928.$$

Test 2 *Consideriamo*

$$I = \int f(x)dx, \quad f(x) = |x| + 1.$$

Domanda numero 18: *In base a quale teorema possiamo dire che la funzione $f(x)$ è integrabile nell' intervallo $[-10, 10]$? Enunciare il teorema.*

Valore: 4.
Sia

$$F_1(x) = \begin{cases} x^2/2 + x + 1, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2/2 + x - 1, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Domanda numero 19: *La funzione $F_1(x)$ è una primitiva di $f(x)$? 1: Si; 2: No; Valore: 2.*
Domanda numero 20: *Giustificare la risposta precedente.*

Valore: 4.
Domanda numero 21: *Scrivere una primitiva $F_2(x)$ di $f(x)$.*

Valore: 8.
Domanda numero 22: *Scrivere una rappresentazione di I.*

Valore: 8.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- La funzione $f(x)$ è integrabile, perché continua. E' integrabile nell' intervallo $[-10, 10]$ in base al teorema che afferma:

Teorema 1.1 *Se una funzione è continua nell' intervallo $[a, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$.*

- La funzione $F_1(x)$ non è una primitiva di $f(x)$ perché non è derivabile nel punto $x = 0$.
- Una primitiva di $f(x)$ è la funzione

$$F_2(x) = \begin{cases} x^2/2 + x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2/2 + x, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- L' integrale indefinito è:

$$I = \{F_2(x) + C,\, C \in \mathbb{R}\}.$$

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione di due variabili*

$$z(x,y) = \begin{cases} g(x,y), & \textit{se } x \in T, \\ 0, & \textit{altrimenti} \end{cases}, \tag{3}$$

dove T è il triangolo chiuso, ossia contenente i lati, nella figura 1,
$g(x,y) = 1 - x - y$.
Sia $f(x,y) = z(x,y)$.
Domanda numero 23: *Qual è il dominio della funzione?*
23A : $\boxed{}$ $< x <$ *23B :* $\boxed{}$,
23C : $\boxed{}$ $< y <$ *23D :* $\boxed{}$.
Valore: 8.
Domanda numero 24: *E' una funzione continua? 1: Si; 2: No;*
Valore: 2.
Domanda numero 25: *E' una funzione derivabile? 1: Si; 2: No; Valore: 2.*
Domanda numero 26: *Qual è l' insieme dei punti M in cui non è continua?*

M =

Valore: 4.
Domanda numero 27: *Qual è l' insieme dei punti N in cui non è derivabile?*

N =

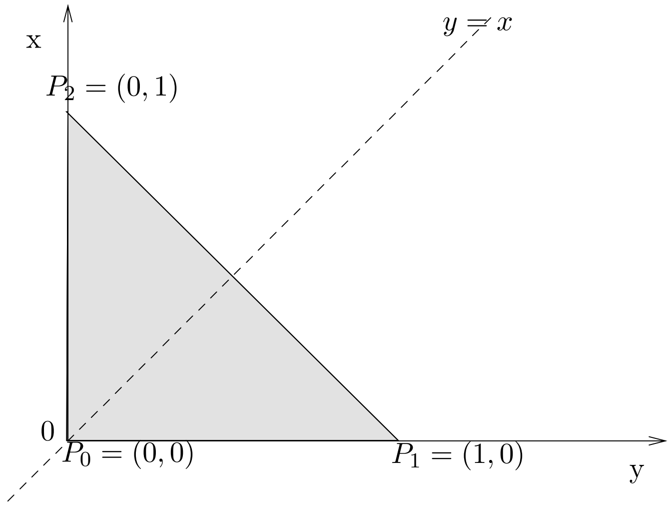


Figura 1: Triangolo T.

Valore: 4.

Domanda numero 28: *Schizzare un grafico della curva di livello $z = 1/2$ nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia $x_1 := x$, $x_2 := y$.

Domanda numero 29: *Quanto vale $\frac{\partial f}{\partial x_1}$?*

$\frac{\partial f}{\partial x_1} =$

Valore: 8.

Domanda numero 30: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_2}$*?*

$\frac{\partial f}{\partial x_2} =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}.$$

Domanda numero 31: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

Valore: 4.

Domanda numero 32: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

Valore: 4.

Domanda numero 33: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

Valore: 4.

Domanda numero 34: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Sia $\mathbf{a} = (1, 2)$.

Domanda numero 35: *Quanto vale* $H_{11}(\mathbf{a})$*?*

35A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 36: *Quanto vale* $H_{12}(\mathbf{a})$*?*

36A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 37: *Quanto vale* $H_{21}(\mathbf{a})$*?*

37A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 38: *Quanto vale* $H_{22}(\mathbf{a})$*?*

38A : $\boxed{}$ *Valore: 4.*

Domanda numero 39: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

39A : $\boxed{}$ *Valore: 2.*

Domanda numero 40: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$?*

40A : ☐ *Valore: 2.*

Domanda numero 41: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*

41A : ☐ *Valore: 2.*

Domanda numero 42: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*

42A : ☐ *Valore: 2.*

Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 1. \tag{4}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.

Domanda numero 43: *Qual è la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione in (4)?*

$y(x) =$

Valore: 48.

Domanda numero 44: *Qual è la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ del problema (4)?*

$\bar{y}(x) =$

Valore: 12.

Domanda numero 45: *Quanto vale*

$$L = \lim_{x \to 1} \bar{y}(x)?$$

L= *45A :* ☐ *Valore: 8.*

Domanda numero 46: *Quanto vale*

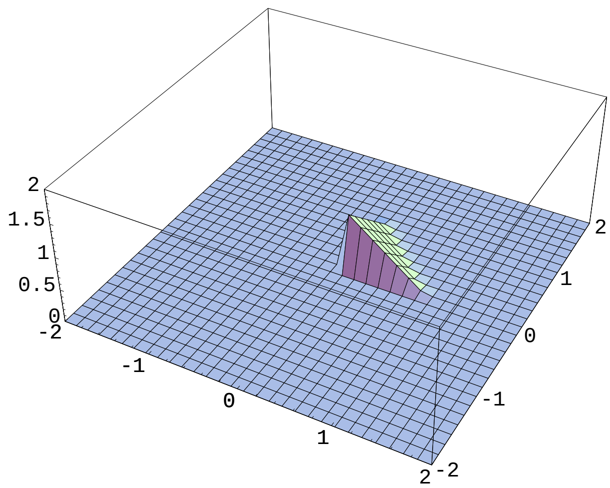
$$L = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

L= *46A :* ☐ *Valore: 8.*

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Ecco un grafico della funzione[1], nel quadrato $[-2, 2]^2$.

[1] Il grafico non è corretto ai bordi di T, perché il piano $z = 1 - x - y$ non è raccordato con il piano $z = 0$. Purtroppo non sono riuscito a togliere la togliere la parte spuria. Se qualcuno mi suggerisce un modo semplice per disegnare un grafico accurato, ne terrò conto



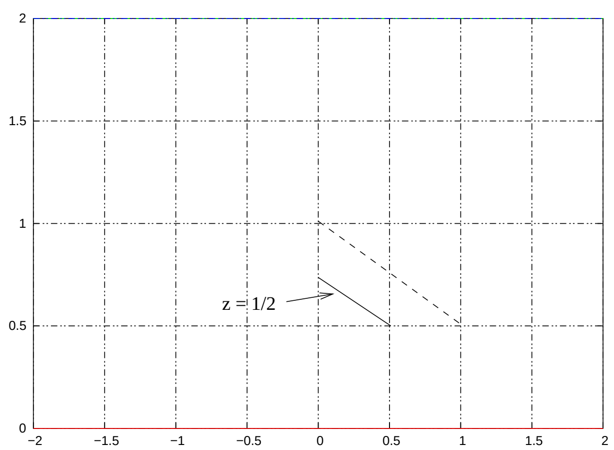
- Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}^2$.
- La funzione non è continua in alcuni punti del dominio.
- La funzione non è derivabile in alcuni punti del dominio.
- L' insieme dei punti in cui non è continua è:

$$M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ x = 0\}.$$

- L' insieme dei punti in cui non è derivabile è:

$$N = M \cup \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ y = -x + 1\}.$$

- La curva di livello $z = 1/2$ è il segmento costituito dai punti (x, y) tali che $0 \leq x \leq 1$, $1/2 = 1 - x - y$, ossia $y = 1/2 - x$.



- Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \begin{cases} -1, & \text{se } (x,y) \in \overset{\circ}{T}, \\ \text{indefinita}, & \text{se } (x,y) \in \partial T, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \cdot$$

  Notare che $\overset{\circ}{T}$ indica l' *interno* di T, ossia T privato del bordo, ossia ancora $\{(x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 - x\}$.

- L' Hessiano è nullo in tutti i punti in cui la funzione è differenziabile.

- Il massimo della funzione è $m = 1$, il minimo $n = 0$.

- L'estremo superiore coincide con il massimo, quello inferiore con il minimo.

- L'equazione differenziale da risolvere è:

$$y' = -y + 1 - x.$$

- La soluzione generale dell' equazione differenziale è:

$$\bar{y}(x) = 2 - x + C \exp(-x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- La soluzione particolare del problema è:

$$\bar{y}(x) = 2 - x.$$

- I limiti valgono

$$L = \lim_{x \to 1} \bar{y}(x) = 1, \quad L = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = -\infty.$$

Riferimenti bibliografici

[Bea72] J. Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media.* Elsevier, New York, 1972.