Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 13 giugno 2005.

Tema A

CORREZIONE

Nome

Cognome

Matricola Aula Posto

Calcolo I Calcolo II

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte vanno date in notazione simbolica o numerica. Quelle errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara, verranno considerate nulle. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito dopo aver scritto sul frontespizio, in caratteri grandi, "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, anche se non sono stati consultati.**

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Attenzione: chi non affronta l' equazione differenziale, difficilmente passerà l' esame...

1 Calcolo I

Test 1 ***Consideriamo la densità di probabilità normale [1]***

$$\mathcal{N}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2).$$

Vogliamo analizzare il comportamento della densità di probabilità Gaussiana con media μ e varianza σ^2

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma}\mathcal{N}((x-\mu)/\sigma). \tag{1}$$

Domanda numero 1***: Scrivere esplicitamente $f(x)$.***

f(x)=

$\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 2***: Qual è il dominio della funzione?***

D=

$\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 3***: Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?***

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 4***: Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?***

4A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui è discontinua. N.B.:

$$\lim_{x\to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x\to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 5***: Punti x_i: x_1=***

5A : $\boxed{}$, L_1^-= ***5B :*** $\boxed{}$,

L_1^+= ***5C :*** $\boxed{}$;

x_2= ***5D :*** $\boxed{}$, L_2^-=

5E : $\boxed{}$, L_2^+= ***5F :*** $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: 1}}$.

Domanda numero 6: ***Qual è la derivata di*** $f(x)$***?***

f'(x) =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 7: ***Qual è la derivata seconda di*** $f(x)$***?***

f''(x) =

$\boxed{\textit{Valore: 16}}$.

Domanda numero 8: ***Punti*** x_i, $i = 1, \ldots, n$ ***in cui*** $f(x)$ ***è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile:*** $x_1 =$

8A : [ ], $f'_-(x_1) =$

8B : [ ]; $f'_+(x_1) =$

8C : [ ]; $x_2 =$ ***8D :*** [ ],

$f'_+(x_2) =$ ***8E :*** [ ]; $f'_-(x_2) =$

8F : [ ]; $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 9: ***Punti estremali*** x_i, $i = 1, \ldots, n$, ***di*** $f(x)$. ***Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo.*** $x_1 =$

9A : [ ]; $f(x_1) =$

9B : [ ]; ***Massimo o minimo?=***

9C : [ ]; $x_2 =$ ***9D :*** [ ];

$f(x_2) =$ ***9E :*** [ ]; ***Massimo o minimo?=***

9F : [ ]; $x_3 =$ ***9G :*** [ ];

$f(x_3) =$ ***9H :*** [ ]; ***Massimo o minimo?=***

9I : [ ]; $\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, ***siano le rette*** $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i ***le ascisse dei punti di tangenza (porre*** $b_i = 1$ ***se l' asintoto è verticale,*** $a_i = 1$ ***se l' asintoto non è verticale,*** $x_i = \pm\infty$, ***se l'asintoto è orizzontale o obliquo).***

Domanda numero 10: ***Asintoti:*** $x_1 =$

10A : [ ]; $a_1 =$ ***10B :*** [ ];

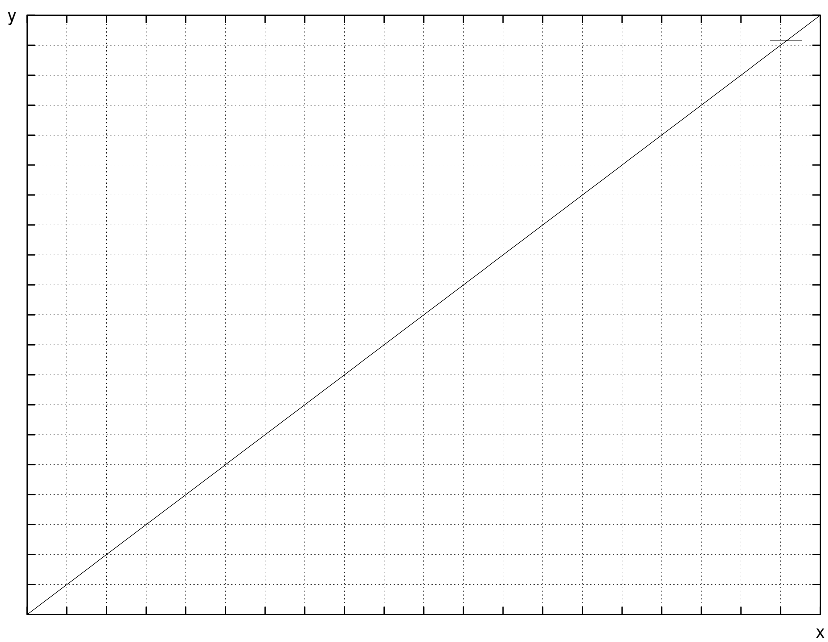
$b_1 =$ ***10C :*** [ ]; $c_1 =$

10D : ☐ ; x_2= ***10E :*** ☐ ;
a_2= ***10F :*** ☐ ; b_2=
10G : ☐ ; c_2=
10H : ☐ . x_3= ***10I :*** ☐ ;
a_3= ***10J :*** ☐ ; b_3=
10K : ☐ ; c_3= ***10L :*** ☐ .

Valore: 2.

Porre $\mu = 1$, $\sigma = 1$.

Domanda numero 11*: Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*



Valore: 80.

Domanda numero 12*: Qual è il polinomio di Taylor di grado 2,* $p_2(x)$***, che approssima*** $f(x)$ ***in un intorno di*** $x = \mu$***?***

$p_2(x)$=

Valore: 16.

Sia

$$q(x) = p_2(x).$$

Domanda numero 13*: La funzione* $q(x)$ *è integrabile?* $\boxed{1}$ ***: No, perché è discontinua.;*** $\boxed{2}$ ***: Si, perché è discontinua.;*** $\boxed{3}$ ***: No, perché è limitata e continua.;*** $\boxed{4}$ ***: Si, perché è limitata e continua.;*** $\boxed{5}$ ***: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;*** $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 14*: Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$***?***

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = \mu$***,*** $b = \mu + \sigma$***,*** $c = \mu + 2\sigma$***,*** $d = \mu + 3\sigma$***,*** $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$***.***

Domanda numero 15*: Calcolare i valori:* $V(a, b)$=

15A : $\boxed{}$; $V(b, c)$=

15B : $\boxed{}$; $V(c, d)$=

15C : $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Otteniamo:

- **La funzione è:**

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)).$$

- **Il dominio è** $D(f) = \mathbb{R}$**.**
- **Risulta**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

- **La funzione è definita in ogni punto.**
- **La funzione è discontinua in nessun punto.**
- **La derivata è:**

$$y'(x) = -\left(\frac{-\mu + x}{e^{\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\right) = -\left(\frac{-\mu + x}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3}\right)\cdot e^{-\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}.$$

- **La derivata seconda è:**

$$y''(x) = \frac{-1 + (-\mu + x)^2}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{(-\mu+x)^2}{2\,\sigma^2}}.$$

- **La funzione è continua, ma non derivabile, in nessun punto.**

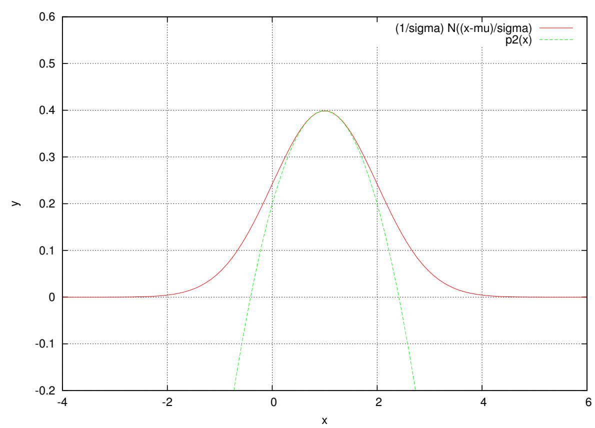
- **Unico punto di stazionarietà:** $x_1 = \mu$, **che corrisponde al Massimo assoluto** $y = 1/(\sigma\,\sqrt{2\pi})$.

- **Asintoti:** $x_1 = -\infty$, $y = 0$; $x_2 = +\infty$, $y = 0$.

- **Il polinomio di Taylor è:**

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} - \frac{(-1 + x)^2}{2\,\sqrt{2\,\pi}}.$$

- **Grafico delle funzioni** $f(x)$ **e** $p_2(x)$**.**



La funzione $q(x)$ **è integrabile perché è continua.**

- **L' integrale indefinito di** $q(x)$ **è:**

$$\int q(x)\,\mathbf{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = x/(2\sqrt{2\pi}) + x^2/(2\sqrt{2\pi}) - x^3/(6\sqrt{2\pi}).$$

- **Gli integrali definiti valgono:**

$$V(a,b) = \frac{5}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq 3.3245 \times 10^{-1};$$

$$V(b,c) = \frac{-1}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq -6.649 \times 10^{-2};$$

$$V(c,d) = \frac{-13}{6\sqrt{2\,\pi}} \simeq -8.6437 \times 10^{-1}.$$

Test 2 Domanda numero 16*: Sia*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}.$$

Usando i soli teoremi sui limiti, dimostrare che
$df(3)/dx = f'(3) = -1/4$***.***
$\boxed{\textbf{\textit{Valore: 8}}}$***.***

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Innanzitutto, visto che in ogni intorno di $x = 3$ che non contiene 1 la funzione è definita, possiamo considerare ad esempio la funzione ristretta all' intervallo $I = [2,3]$,

$$f_I = f|_I = \frac{1}{x-1}.$$

Dobbiamo provare che

$$f_I'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f_I(3+h) - f_I(3)}{h} = -1/4.$$

Infatti

$$f_I'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f_I(3+h) - f_I(3)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1/(3+h-1) - 1/(3-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(h+2)} = -1/4.$$

QED

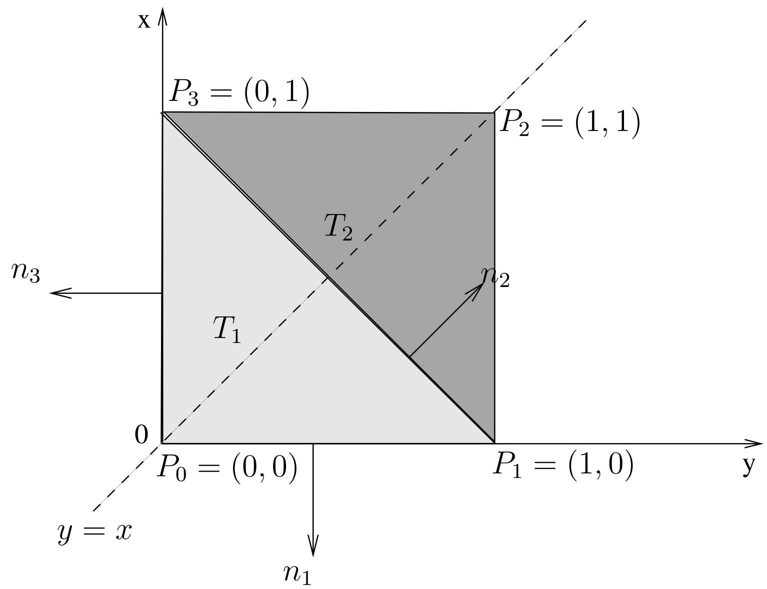


Figura 1: I triangoli T_1 e T_2.

2 Calcolo II

Test 3 ***Consideriamo la funzione di due variabili***

$$z(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y), & se\,(x,y) \in T_1, \\ f_2(x,y), & se\,(x,y) \in T_2, \end{cases} \tag{3}$$

dove T_1 ***e*** T_2 ***sono i triangoli (bordi compresi) mostrati nella figura 1,*** $f_1(x,y) = x + y$***,*** $f_2(x,y) = -x - y + 2$***.***

Domanda numero 17***: Qual è il dominio della funzione?***

$D\ =$

$\boxed{\textit{Valore: } 4}$.

Domanda numero 18***: E' una funzione continua?*** $\boxed{1}$ ***: Si;*** $\boxed{2}$ ***: No;*** $\boxed{\textit{Valore: } 2}$.

Domanda numero 19***: E' una funzione derivabile?*** $\boxed{1}$ ***: Si;*** $\boxed{2}$ ***: No;*** $\boxed{\textit{Valore: } 2}$.

Domanda numero 20***: Quanto vale*** $\partial f/\partial x_1$***?***

$\partial f/\partial x_1\ =$

$\boxed{\textbf{\textit{Valore: 8}}}$.

Domanda numero 21*: Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

$\boxed{\textbf{\textit{Valore: 8}}}$.

Domanda numero 22*: Qual è l' Hessiano di* f*?*

$H =$

$\boxed{\textbf{\textit{Valore: 8}}}$.

Domanda numero 23*: Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

23A : $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 2}}}$.

Domanda numero 24*: Quanto vale il minimo di* $f(x_1, x_2)$*?*

24A : $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 2}}}$.

Domanda numero 25*: Quanto vale l'estremo superiore di* $f(x_1, x_2)$*?* ***25A :*** $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 2}}}$.

Domanda numero 26*: Quanto vale l'estremo inferiore di* $f(x_1, x_2)$*?* ***26A :*** $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 2}}}$.

Vogliamo calcolare il salto, S***, della derivata di*** f ***nella direzione della normale esterna a*** T_1 ***lungo il lato*** $L = P_1 - P_3$***, piú precisamente il valore***

$$S = \left| \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2} \right] \right| = \left| \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}_2} - \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{n}_2} \right|.$$

dove $\mathbf{n}_2 = (1,1)^T/\sqrt{2} = (\cos \widehat{\mathbf{n}_2 x}, \sin \widehat{\mathbf{n}_2 x})$***. Ricordare che se*** u ***è una funzione differenziabile e*** $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ ***un vettore unitario in*** $\mathbb{R}^2$***, si ha***

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial u}{\partial x} v_x + \frac{\partial u}{\partial y} v_y.$$

Domanda numero 27*: Quanto vale* $\partial f_1/\partial \mathbf{n}_2$*?*

27A : $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 10}}}$.

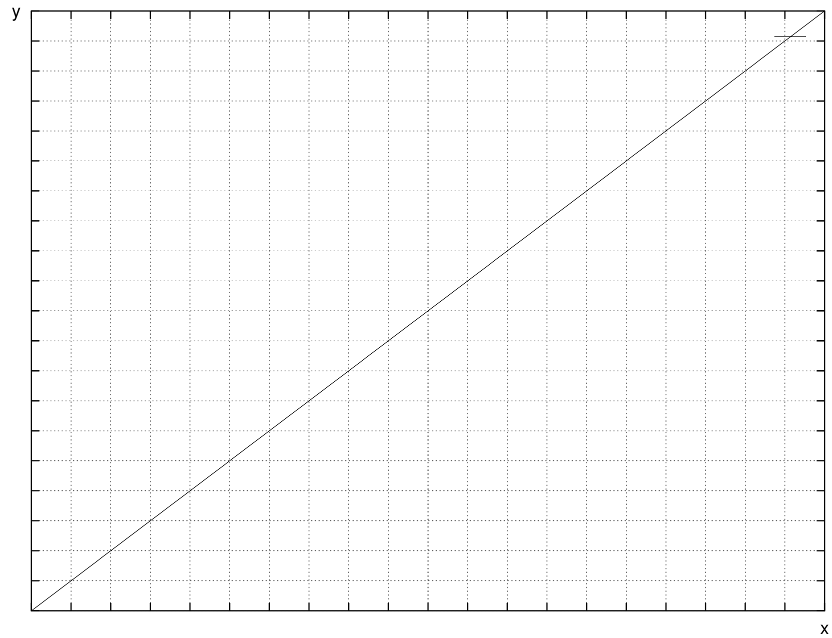
Domanda numero 28*: Quanto vale* $\partial f_2/\partial \mathbf{n}_2$*?*

28A : $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 10}}}$.

Domanda numero 29*: Quanto vale* S*?*

29A : $\boxed{}$ $\boxed{\textbf{\textit{Valore: 20}}}$.

Domanda numero 30*: Nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale, schizzare il grafico della funzione* $z = f(x, y)$ *e della sua derivata, lungo la retta* $y = x$.



Valore: *40*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f_2(x, y), \quad y(1) = y_0 = 1. \tag{4}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$**.**
Domanda numero 31*: Qual è la soluzione generale* $y(x)$ ***dell'equazione in (4)?***

$y(x) =$

Valore: *48*.
Domanda numero 32*: Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ ***del problema (4)?***

$\bar{y}(x) =$

Valore: *12*.
Domanda numero 33*: Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to -\infty} \bar{y}(x)?$$

$L_1 =$ ***33A :*** [ ] **Valore: *8*.**

Domanda numero 34*: Quanto vale*

$$L_2 = \lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x)?$$

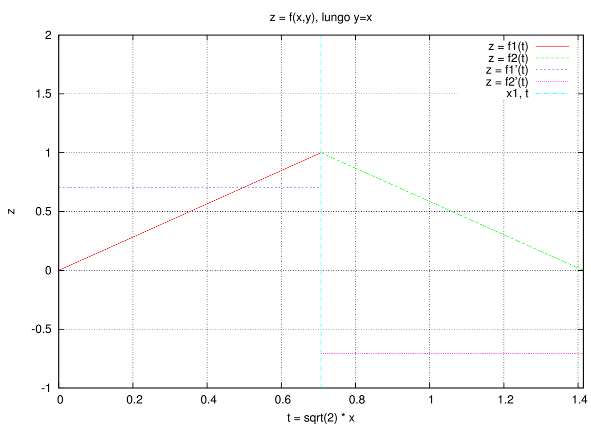
$L_2=$ ***34A :*** $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- **Il dominio della funzione è** $T_1 \cup T_2 = [0,1]^2$.
- **La funzione è continua nel suo dominio.**
- **L' insieme dei punti in cui non è derivabile è:**

$$N = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y = 1 - x\}.$$

- **Il grafico della funzione, lungo la retta** $y = x$ **è il seguente:**



- **Sia** $\overset{\circ}{T_i}$ **l'** ***interno*** **di** T_i**, ossia** T_i **privato del bordo. Abbiamo**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 1, & se\ (x,y) \in \overset{\circ}{T_1}, \\ -1, & se\ (x,y) \in \overset{\circ}{T_2}. \end{cases}$$

- **L' Hessiano è nullo in tutti i punti in cui la funzione è differenziabile.**
- **Il massimo della funzione è** $m = 1$**, il minimo** $n = 0$**.**

- **L'estremo superiore coincide con il massimo, quello inferiore con il minimo.**
- **Abbiamo**

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\pi/4) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\pi/4) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

  Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}_2} = \begin{cases} \sqrt{2}, & se\,(x,y) \in \overset{\circ}{T}_1, \\ -\sqrt{2}, & se\,(x,y) \in \overset{\circ}{T}_2. \end{cases}$$

- **Risulta quindi**

$$S = 2\sqrt{2}.$$

- **L'equazione differenziale da risolvere è:**

$$y' = -x - y + 2.$$

- **La soluzione generale dell' equazione differenziale è:**

$$y(x) = 3 - x + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- **La soluzione particolare del problema è:**

$$\bar{y}(x) = -\left(\frac{e - 3\,e^x + e^x\,x}{e^x}\right) = -e^{1-x} + 3 - x.$$

- **I limiti valgono**

$$L_1 = \lim_{x\to-\infty} \bar{y}(x) = -\infty, \quad L_2 = \lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x) = -\infty.$$

Riferimenti bibliografici

[1] W. Feller, ***An Introduction to Probability Theory and its Applications***, **vol. 2, John Wiley and Sons, New York, 1966.**

*** fine testo ***