Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 28 giugno 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{E}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta “non esiste” si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, “non esistono punti di flesso”, si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando “infiniti con segno”. Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *La soluzione dell' equazione (2.2.4) in [1, pag. 69] è:*

$$y = h(x) = \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)}\,(1-\exp(-x/\epsilon)) + s\,x.$$

Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x) = |h(x+3)|$ in tutto il suo dominio, quando $s = 1/2$, $\epsilon = 10^{-3}$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*

1A : $\boxed{}$ $< x <$ *1B :* $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: } 7}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*

2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: } 5}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: } 5}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x\to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x\to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{1}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1=$ 4A : [ ], $L_1^+=$ 4B : [ ], $L_1^-=$ 4C : [ ]; $x_2=$ 4D : [ ], $L_2^+=$ 4E : [ ], $L_2^-=$ 4F : [ ].*

Valore: 6.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i=1,\ldots,n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: $x_1=$ 6A : [ ], $f(x_1)=$ 6B : [ ]; $f'_+(x_1)=$ 6C : [ ]; $f'_-(x_1)=$ 6D : [ ]; $x_2=$ 6E : [ ], $f(x_2)=$ 6F : [ ]. $f'_+(x_2)=$ 6G : [ ]; $f'_-(x_2)=$ 6H : [ ];* *Valore: 8*.

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i=1,\ldots,n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1=$ 7A : [ ]; $f(x_1)=$ 7B : [ ]; Massimo o minimo?= 7C : [ ]; $x_2=$ 7D : [ ]; $f(x_2)=$ 7E : [ ]; Massimo o minimo?= 7F : [ ];* *Valore: 20*.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_iy+b_ix+c_i=0$, $i=1,\ldots,n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i=1$ se l' asintoto è verticale, $a_i=1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i=\pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1=$ 8A : [ ]; $a_1=$ 8B : [ ]; $b_1=$ 8C : [ ]; $c_1=$ 8D : [ ]; $x_2=$ 8E : [ ];*

a_2= *8F :* [ ]; b_2= *8G :* [ ];
c_2= *8H :* [ ]. *Valore: 12*.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = \left| h(x+3) - \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)} \left(1 - \exp(-x/\epsilon)\right) \right|.$$

Domanda numero 10: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

Valore: 20.

Sia $a = -6$, $b = -3$, $c = 3$, $d = 6$.

Domanda numero 11: *Sia $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$. $V(a, b)$=*
11A : [ ]; $V(b, c)$= *11B :* [ ];
$V(c, d)$= *11C :* [ ]. *Valore: 24*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

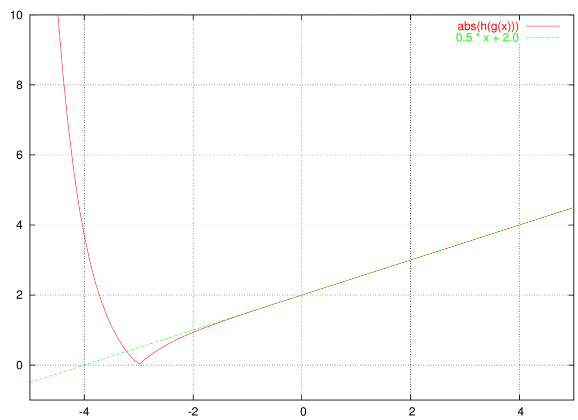
- Risulta

$$f(x) = |h(x+3)| = \begin{cases} f_1(x), & se \quad x \geq -3, \\ -f_1(x), & altrimenti, \end{cases}$$

dove

$$f_1(x) = \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)}\,(1-\exp(-(x+3)/\epsilon)) + s\,(x+3).$$

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
- La funzione è definita ovunque.
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} y_1(x), & se \quad x > -3, \\ -y_1(x), & altrimenti, \end{cases}$$
essendo
$$y_1(x) = \frac{1-s}{e^{3+x/\epsilon}\,(1-e^{-1/\epsilon})\,\epsilon} + s.$$
- La funzione è continua ma non derivabile in $x=-3$, dove $y(x)=0$. Abbiamo $f'_+(-3) = 500.5$, $f'_-(-3) = -500.5$.
- L' unico punto estremale è $x=-3$, dove $y=0$.
- Asintoti: vi è un asintoto obliquo, $y = sx + 3s + \frac{1-s}{1-\exp(-1/\epsilon)} \simeq 0.5x + 2$.
- Grafico della funzione.



- Risulta
$$q(x) = s|x+3|.$$

L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + C\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} s\,(x^2/2 + 3x), & se \quad x \geq -3, \\ -s\,(x^2/2 + 3x + 9), & altrimenti. \end{cases}$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = 2.25;$$

$$V(b,c) = 9;$$

$$V(c,d) = 11.25.$$

Test 2 *Il teorema di esistenza locale della soluzione dell' equazione $y' = f(x,y)$, afferma che se esistono delle costanti ϵ, δ_0, $K > 0$ t.c.:*

- *(a)* $(\forall y \in [A-\epsilon, A+\epsilon])$ *f è continua rispetto a x nell' intervallo $I = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$;*
- *(b)*

$$(\forall x \in I)(y, z \in [A-\epsilon, A+\epsilon]) \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq K\,|y - z|,$$

allora esiste un $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che il problema

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in D, \\ y(x_0) = A, \end{cases} \tag{2}$$

ha un' unica soluzione $y(x)$.
Domanda numero 12: *Questo teorema vale per l' equazione $y' = xy$, quando $x_0 = 1$, $A = 2$?*
$\boxed{\textit{Valore: 50}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Nel nostro problema, la condizione (a) si traduce nell' affermazione: *per ogni* $y \in [2-\epsilon, 2+\epsilon]$*, la funzione* $xy+1$ *è continua rispetto a* x *in* $I = (1-\delta_0, 1+\delta_0)$, per un opportuno valore δ_0. L' affermazione è vera per ogni $\epsilon > 0$, $\delta_0 > 0$, in quanto la funzione $g(x) = c\,x + 1$ è continua in tutto $\mathbb{R}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ fissato.
Per fissare le idee, supponiamo ad esempio che sia $\delta_0 = 1$, per cui $I = (0, 1)$.
La condizione (b) afferma che esiste una costante $K > 0$ t.c.:

$$(\forall x \in I)(y, z \in [2-\epsilon, 2+\epsilon]) \quad |xy - (xz)| \le |x(y-z)| \le K\,|y-z|.$$

La condizione (b) è vera perché per ogni $c \in I$ fissato,

$$|c(y-z)| = c\,|y-z| < |y-z|.$$

Da questo risultato vediamo che qualsiasi $\delta_0 > 0$ rende vera la condizione (b), non solo il valore $\delta_0 = 1$.
Quindi il teorema vale per l' equazione considerata.

QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Dato il potenziale*

$$u(x,y) = f(x,y) = x \cdot y + 1, \tag{3}$$

vogliamo calcolare il flusso

$$\begin{aligned} \phi &= \int_{\partial_T} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\, ds = & (4)\\ &\int_{l_1} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds + \int_{l_2} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds + \int_{l_3} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\ ds = & (5)\\ &\phi_1 + \phi_2 + \phi_3. & (6)\end{aligned}$$

attraverso la frontiera, ∂T*, del triangolo* T *in figura 1, dove* l_1*,* l_2*,* l_3 *sono i lati di* T*,* $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ *è la normale* unitaria esterna *alla frontiera di* T*,* $\partial T = l_1 \cup l_2 \cup l_3$*.*
Ricordo che

$$(\nabla u) \circ \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y.$$

Domanda numero 13*: Qual è il dominio della funzione* f*?* $\boxed{1}$ *:* $(-\infty, +\infty) \times [-y_m, y_m]$*;* $\boxed{2}$ *:* $[-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty)$*;* $\boxed{3}$ *:*

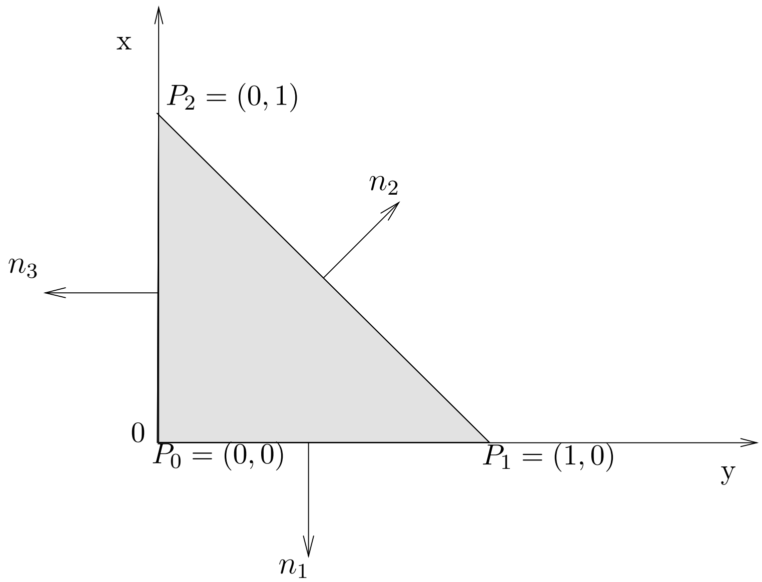


Figura 1: Triangolo T.

$(-\infty,+\infty)\times[-\infty,+\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\textit{Valore: 6}}$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva di livello $f = 2$. nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 15: *Quanto vale $f_x = \partial f/\partial x$?*

$f_x =$

$\boxed{\textit{Valore: } 8}$.

Domanda numero 16: *Quanto vale* $f_y = \partial f/\partial y$*?*

$f_y =$

$\boxed{\textit{Valore: } 8}$.

Ricordiamo che,

- *se* l *è una curva definita parametricamente dalle equazioni* $x = x(t)$*,* $y = y(t)$*,* $0 \le t \le 1$ *e* $h(x, y)$ *è una funzione integrabile sulla curva* l *, allora*
$$\int_l h(x, y)\, ds = \int_0^1 h(x(t), y(t))\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$
dove $x' = x'(t) = dx/dt$*,* $y' = y'(t) = dy/dt$*.*

- *Facendo riferimento alla figura 1:*
$$\mathbf{n}_1 = (0, -1), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \quad \mathbf{n}_3 = (-1, 0).$$

Il segmento l_1 *è definito dalle equazioni* $x(t) = t$*,* $y(t) = 0$*,* $0 \le t \le 1$*.*

Domanda numero 17: *Che funzione è* $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ *su* l_1*?*

$l(t) =$

$\boxed{\textit{Valore: } 8}$.

Il segmento l_2 *è definito dalle equazioni* $x(t) = t$*,* $y(t) = 1 - t$*,* $0 \le t \le 1$*.*

Domanda numero 18: *Che funzione è* $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ *su* l_2*?*

$l(t) =$

$\boxed{\textit{Valore: } 8}$.

Il segmento l_3 *è definito dalle equazioni* $x(t) = 0$*,* $y(t) = t$*,* $0 \le t \le 1$*.*

Domanda numero 19: *Che funzione è* $l(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ *su* l_3*?*

$l(t) =$

$\boxed{\textit{Valore: } 8}$.

Domanda numero 20: *Che funzione è* $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_1$*?*

$v(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 21: *Che funzione è* $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_2$*?*

$v(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 22: *Che funzione è* $v(t) = -(\nabla u) \circ \mathbf{n}_3$*?*

$v(t) =$

$\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 23: *Quanto vale* ϕ_1*?* $\phi_1 =$
23A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 24: *Quanto vale* ϕ_2*?* $\phi_2 =$
24A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 25: *Quanto vale* ϕ_3*?* $\phi_3 =$
25A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Domanda numero 26: *Quanto vale* ϕ*?* $\phi =$
26A : $\boxed{}$ $\boxed{\text{Valore: } 8}$.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y) - 1 + y = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 2. \tag{7}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 27: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (7)?*

$y(x) =$

$\boxed{\text{Valore: } 48}$.
Domanda numero 28: *Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (7)?*

$\bar{y}(x) =$

$\boxed{\text{Valore: } 24}$.
Domanda numero 29: *Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

$L_1 =$ *29A* : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 30: *Quanto vale il limite* da sinistra

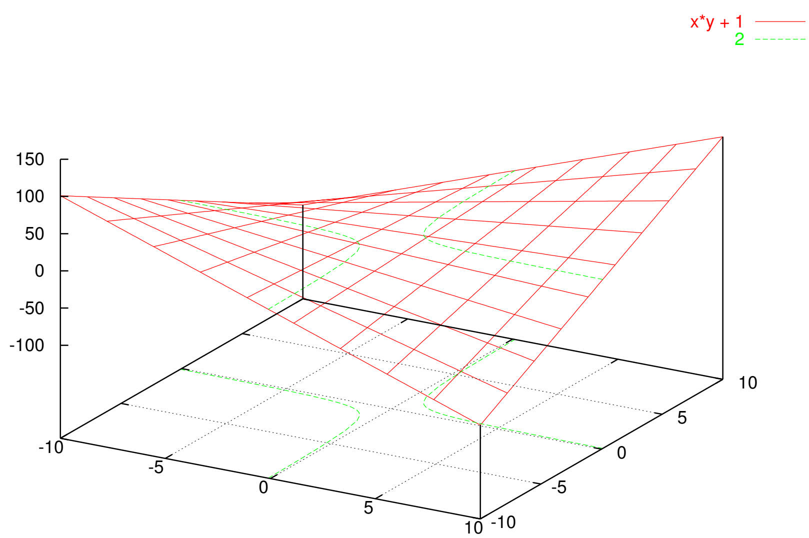
$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x)?$$

$L_2 =$ *30A* : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.

- Grafico della funzione e della curva di livello $u = 2$, che è la curva implicita $xy + 1 = 2$, ossia i due archi di iperbole di equazione $y = 1/x$.



- Il gradiente è $\nabla f = (y, x)$.

- Su l_1 abbiamo $x' = 1$, $y' = 0$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(0, t) \circ (0, -1)$,

$$\phi_1 = \int_{l_1} -(\nabla u) \circ \mathbf{n} \, ds = \int_0^1 -(0, t) \circ (0, -1) \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt = \int_0^1 t \, dt = 1/2;$$

su l_2, $x' = 1$, $y' = -11$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(1-t,t) \circ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned}\phi_2 = \quad & \int_{l_2} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 -(1-t,t) \circ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t = \\ & \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}t = -1;\end{aligned}$$

infine su l_3 abbiamo $x' = 0$, $y' = 1$, $-(\nabla u) \circ \mathbf{n} = -(t,0) \circ (-1,0)$,

$$\begin{aligned}\phi_3 = \quad & \int_{l_3} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 -(t,0) \circ (-1,0)\,\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}t = \\ & \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 1/2;\end{aligned}$$

Quindi: $\phi = 1/2 - 1 + 1/2 = 0$.

Nota: dato che

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 + 0 = 0,$$

il risultato precedente è immediata conseguenza del teorema di Gauss che sotto ipotesi opportune, verificate in questo caso, afferma

$$\int_{\partial_T} -(\nabla u) \circ \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int\int_T (\Delta u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

- Le soluzioni dell' equazione $y' = u(x,y) - 1 + y = xy + y$ sono $y(x) = C\exp(x^2/2 + x)$.
- La soluzione del problema differenziale è $\bar{y}(x) = 2\exp(-3/2)\exp(x^2/2 + x)$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = +\infty.$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x) = \bar{y}(1) = 2.$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1990. Prima edizione nel 1979, Springer, New York.