Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2005.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & 0 \leq x \leq \ln(2\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f_1(x) = -1/(2\tan(1))$, $f_2(x) = -1/(2\tan(\exp x))$,
$f_3(x) = -1/(2\tan(2\pi - 1/10))$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?* $\mathbb{R}\setminus\{$

1A : $\boxed{}$, *1B :* $\boxed{}$,

1C : $\boxed{}$ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 15}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to -\infty$*?*

2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di* $f(x)$ *per* $x \to +\infty$*?*

3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei primi punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: x_1=* *4A :* [ ], L_1^-= *4B :* [ ], L_1^+= *4C :* [ ]; x_2= *4D :* [ ], L_2^-= *4E :* [ ], L_2^+= *4F :* [ ]. *Valore: 6*.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 16.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: x_1=* *6A :* [ ], $f(x_1)$= *6B :* [ ]; $f'_+(x_1)$= *6C :* [ ]; $f'_-(x_1)$= *6D :* [ ]; x_2= *6E :* [ ], $f(x_2)$= *6F :* [ ]. $f'_+(x_2)$= *6G :* [ ]; $f'_-(x_2)$= *6H :* [ ]; *Valore: 8*.

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. x_1=* *7A :* [ ]; $f(x_1)$= *7B :* [ ]; *Massimo o minimo?=* *7C :* [ ]; x_2= *7D :* [ ]; $f(x_2)$= *7E :* [ ]; *Massimo o minimo?=* *7F :* [ ]; *Valore: 20*.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: x_1=* *8A :* [ ]; a_1= *8B :* [ ]; b_1= *8C :* [ ]; c_1= *8D :* [ ]; x_2=

8E : $\boxed{}$; a_2= *8F :* $\boxed{}$; b_2=
8G : $\boxed{}$; c_2= *8H :* $\boxed{}$; x_3=
8I : $\boxed{}$; a_3= *8J :* $\boxed{}$; b_3=
8K : $\boxed{}$; c_3= *8L :* $\boxed{}$.

$\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \ln(2\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* $\boxed{1}$ *: No, perché è discontinua.;* $\boxed{2}$ *: Si, perché è discontinua.;* $\boxed{3}$ *: No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{4}$ *: Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* $\boxed{5}$ *: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;* $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a,b)$=
12A : $\boxed{}$; $V(b,c)$= *12B :* $\boxed{}$;
$V(c,d)$= *12C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

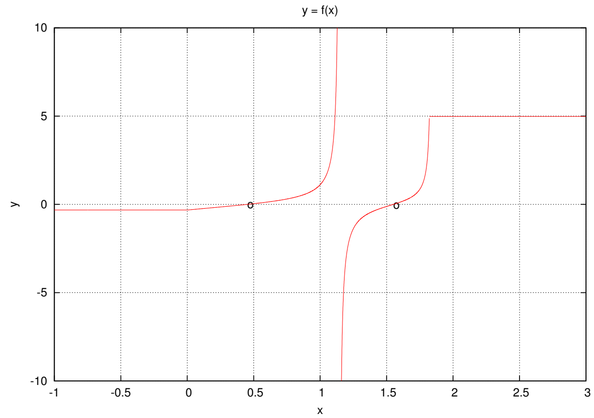
Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Poniamo $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \ln\pi \simeq 1.1447$, $\bar{x}_3 = \ln(2\pi - 1/10) \simeq 1.8218$, $\bar{x}_4 = \ln(\pi/2) \simeq 0.45158$, $\bar{x}_5 = \ln(3\pi/2) \simeq 1.5502$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq$ -0.32105, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq 4.9833$.

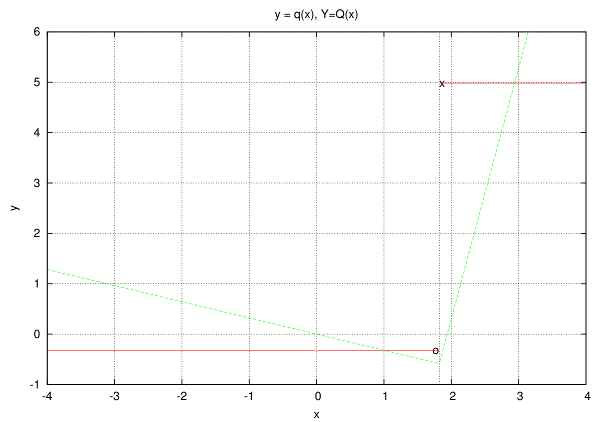
- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{\ln(\pi/2), \ln\pi, \ln(3\pi/2)\}$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \bar{y}_1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione non è definita nei punti:

  $\bar{x}_4$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_4-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\bar{x}_4+} f(x) = 0.$$
  $\bar{x}_2$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_2-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\bar{x}_2+} f(x) = -\infty.$$
  $\bar{x}_5$,
$$\lim_{x\to\bar{x}_5-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\bar{x}_5+} f(x) = 0.$$
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}\left(1 + \cot^2(x)\right), & \text{se } 0 < x < \log(2\pi - 1/10),\ x \neq \bar{x}_4, \bar{x}_2, \bar{x}_5, \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, nei punti: $x_1 = 0$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 7.0614 \times 10^{-1}$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f'_-(x_2) = 3.1019 \times 10^2$. $f'_+(x_2) = 0$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < 0$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \ln(2\pi - 1/10)$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f(x_2) = \bar{y}_3$.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = -1/(2\tan(1))$; $x_2 = \ln\pi$, asintoto $x = \ln\pi$; $x_3 = +\infty$, $y = -1/(2\tan(2\pi - 1/10))$.

- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1 \cdot x, & se \quad x \leq \log(2\pi - 1/10), \\ \bar{y}_3 \cdot x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_3 & altrove. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = \frac{-\cot(1)}{2} \simeq -3.2105 \times 10^{-1}.$$

$$V(b,c) = \frac{-\cot(\frac{1}{10})\ (-2+\alpha) - \cot(1)\ (-1+\alpha)}{2} \simeq 6.2401\ \times\ 10^{-1},$$

dove $\alpha = \log(-\left(\frac{1}{10}\right) + 2\,\pi)$,

$$V(c,d) = \frac{\cot(\frac{1}{10})}{2} \simeq 4.9833.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x\to 1/9} \sin(x) = \sin(1/9).$$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 1/9| < \delta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(1/9)| < \epsilon). \qquad (3)$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\sin(x) - \sin(1/9)| < \epsilon;$$

ossia

$$-\epsilon < \sin(x) - \sin(1/9) < \epsilon;$$

per semplicità supponiamo $\epsilon < 1/1000$. Le soluzioni sono:

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) < x < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon).$$

Quindi

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9 < x - 1/9 < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9.$$

Se $\epsilon < 1/9 - \sin(1/9)$, essendo

$$\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9 < 0 < \arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9,$$

$$|\arcsin(\sin(1/9) - \epsilon) - 1/9| < |\arcsin(\sin(1/9) + \epsilon) - 1/9|,$$

ponendo

$$\mu = min(1/9 - \sin(1/9), \epsilon), \quad \delta = |\arcsin(\sin(1/9) - \mu) - 1/9|,$$

la (3) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0, 4]^2$.

Domanda numero 14: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_1$*?*

$\partial f/\partial x_1 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 15: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 17: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 18: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.

Domanda numero 19: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Domanda numero 20: *I punti di stazionarietà di $f(x,y)$ sono $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, di z.* $\mathbf{x}_1$=(*20A :* [ ], *20B :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= *20C :* [ ];
$\mathbf{x}_2$=(*20D :* [ ], *20E :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= *20F :* [ ];
$\mathbf{x}_3$=(*20G :* [ ], *20H :* [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= *20I :* [ ];

Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$ sul bordo del dominio?* *21A :* [ ] *Valore: 10*.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$?*
22A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$?*
23A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*
24A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*
25A : [ ] *Valore: 2*.

Si vuole risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{f(x,y) + 4x + 12y - 5}{x^2}; \tag{4}$$

N.B.: $f(x,y) = f(\mathbf{x})$, posto $\mathbf{x} = (x,y)$.

Domanda numero 26: *Quali sono le soluzioni $y(x)$ dell'equazione (4)?*

$y_1(x)$ =

$y_2(x)$ =

Valore: 80.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (8x_1 - 4, 18x_2 - 12)^T.$$

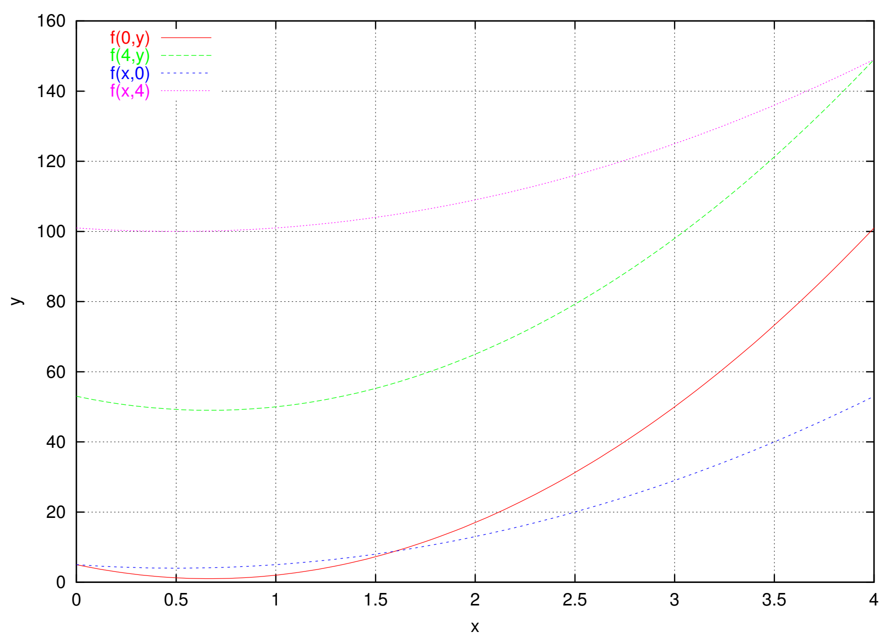
- Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà è $x_1 = (1/2, 2/3)$, $f(x_1) = 0$, che è minimo relativo della funzione, dato che $\det(H) > 0$, $H_{11} > 0$ (nonché minimo assoluto).

- Il bordo del dominio è l' insieme $B = \{(x,y) : x = 0, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : x = 4, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 0\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 4\}$.

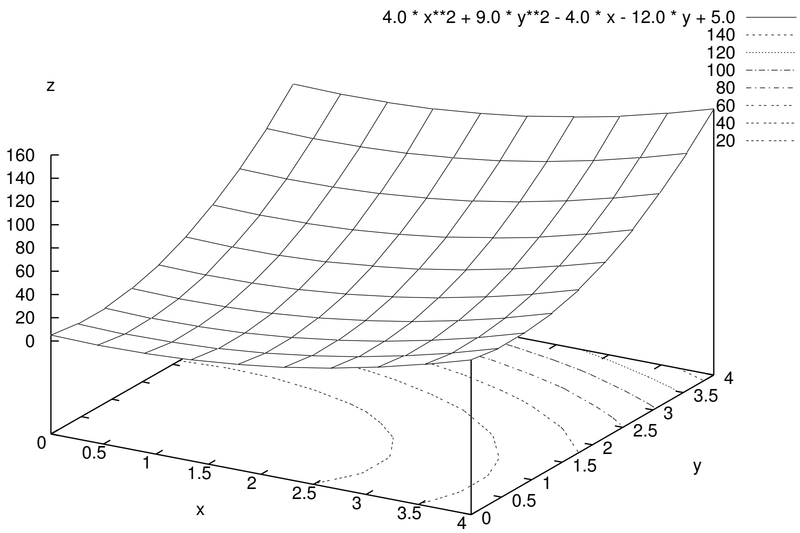
  I grafici di $f(x,y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.



  Il massimo di $f(x,y)$ su B è 149, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali assoluti sono: $\min_{x \in D} f = 0$, $\max_{x \in D} f = 149$, $\inf_{x \in D} f = 0$, $\sup_{x \in D} f = 149$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (4) da risolvere è:

$$y' = \frac{4x^2 + 9y^2}{x^2} = 4 + \frac{9y^2}{x^2}. \tag{5}$$

Ponendo $z = y/x$, otteniamo $y' = xz' + z$, ossia nel nostro caso:

$$xz' + z = 4 + 9z^2,$$

da cui

$$z' = \frac{9z^2 - z + 4}{x},$$

e ancora

$$\frac{\mathrm{d}z}{9z^2 - z + 4} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Otteniamo

$$\frac{2}{\sqrt{143}} \arctan \frac{18z - 1}{\sqrt{143}} = \ln|x| + C.$$

Infine abbiamo

$$y = (x/18)(1 + \sqrt{143}\tan((\sqrt{143}/2)(\ln|x| + C)))$$