Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 7 giugno 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square\,.\,\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square\,.\,\square\square\square\square\;\boxed{\mathrm{E}}\;\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *La figura 1 mostra la crescita di temperatura della terra in gradi centrigradi, dal 1860 al 1900. I valori sono tratti da Applying Mathematics di D.N. Burghes, I. Huntley, e J. McDonald, Ellis Horwood, 1982, pag. 175. Una funzione che approssima questo andamento è:*

$$f(x) = (1/4)\sin(ax + b) \cdot g(x), \tag{1}$$

dove $a = 2/100$, $b = -38/100$,

$$g(x) = \frac{(x - t_0)^3}{|t_0|^3}, \tag{2}$$

$t_0 = -2 \times 10^5$.
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x)$ *in tutto il suo dominio.*

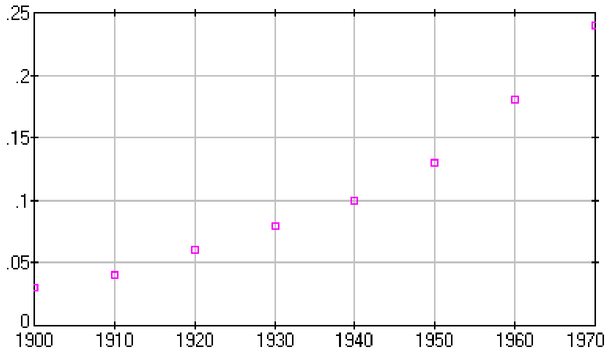


Figura 1: Crescita della temperatura mondiale.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
1A : ☐ $< x <$ *1B* : ☐.
Valore: 7.
Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : ☐ Valore: 5.
Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : ☐ Valore: 5.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{3}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1 =$* *4A* : ☐,
$L_1^+ =$ *4B* : ☐, $L_1^- =$
4C : ☐;
$x_2 =$ *4D* : ☐, $L_2^+ =$
4E : ☐, $L_2^- =$ *4F* : ☐.
Valore: 6.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 8.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: $x_1 =$* *6A* : ☐, $f(x_1) =$

6B : $\boxed{}$; x_2= *6C :* $\boxed{}$, $f(x_2)$=
6D : $\boxed{}$. $\boxed{\text{Valore: 4}}$.

Domanda numero 7: *Quanti punti estremali ha la funzione?* $\boxed{1}$ *: Nessuno;* $\boxed{2}$ *: 10;* $\boxed{3}$ *: 100;* $\boxed{4}$ *: 1000;* $\boxed{5}$ *: Infiniti;* $\boxed{\text{Valore: 2}}$.

Lo sviluppo di Taylor di ordine 1 della derivata intorno al punto $x = 1950$ *è*

$$t(x) = 0.00311797 - 0.0000818728\,(-1950 + x)\,.$$

Domanda numero 8: *Qual è il punto estremale piú vicino a* $x = 1950$ *che si può stimare con questa informazione? Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo, "-1" se di flesso.* x_1=
8A : $\boxed{}$; $f(x_1)$= *8B :* $\boxed{}$;
Massimo o minimo?= *8C :* $\boxed{}$. $\boxed{\text{Valore: 14}}$.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$*, siano le rette* $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i *le ascisse dei punti di tangenza (porre* $b_i = 1$ *se l' asintoto è verticale,* $a_i = 1$ *se l' asintoto non è verticale,* $x_i = \pm\infty$*, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).*

Domanda numero 9: *Asintoti:* x_1= *9A :* $\boxed{}$;
a_1= *9B :* $\boxed{}$; b_1= *9C :* $\boxed{}$;
c_1= *9D :* $\boxed{}$; x_2= *9E :* $\boxed{}$;
a_2= *9F :* $\boxed{}$; b_2= *9G :* $\boxed{}$;
c_2= *9H :* $\boxed{}$. $\boxed{\text{Valore: 8}}$.

Domanda numero 10: *Schizzare il grafico della funzione e dei dati nell' intervallo* $[1600, 2000]$*, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 11: *Schizzare il grafico della funzione nell' intervallo* $[1600, 2000]$, *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Sia $q(x) = f(x)/g(x)$

Domanda numero 12: *Qual è l'integrale indefinito di* $q(x)$*?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 1700$, $b = 1800$, $c = 1900$, $d = 2000$.

Domanda numero 13: *Sia* $V(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} q(x)dx$. $V(a, b) =$

13A : $\boxed{}$; $V(b,c)=$ *13B :* $\boxed{}$; $V(c,d)=$ *13C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

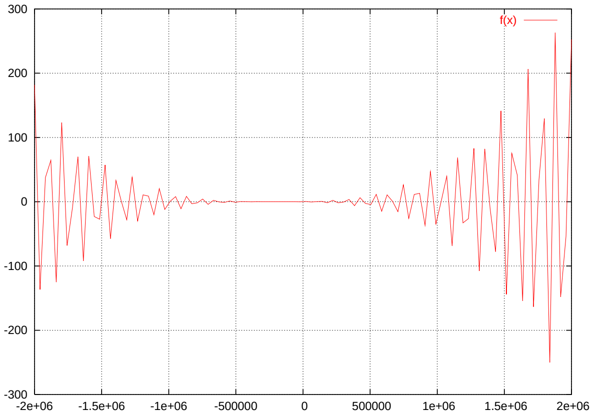
- Il dominio è $D = \mathbb{R}$
- Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{non esiste}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{non esiste}.$$

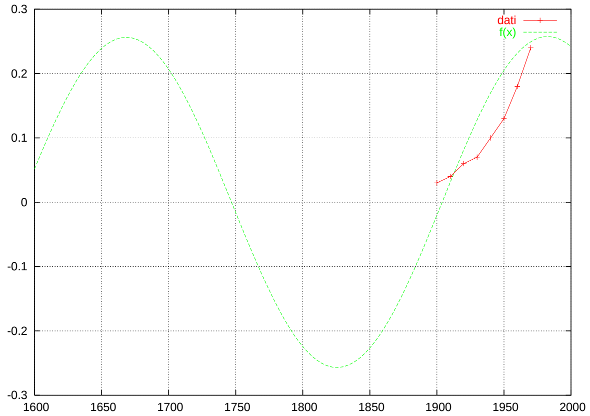
- Non vi sono punti di accumulazione del dominio in cui $f(x)$ non è definita.
- Risulta:

$$f'(x) = \frac{2.5\,\times\,10^{-1}\,a\,(x-t_0)^3\,\cos(b+a\,x)}{|t_0|^3} + \frac{7.5\,\times\,10^{-1}\,(x-t_0)^2\,\sin(b+a\,x)}{|t_0|^3} =$$
$$1/|t_0|^3(0.005\,(-t_0+x)^3\,\cos(0.02\,(-19+x)) + 0.75\,(-t_0+x)^2\,\sin(0.02\,(-19+x))) =$$
$$6.25\,10^{-19}\,(200000+x)^3\,\cos(0.02\,(-19+x)) + 9.375\,10^{-17}\,(200000+x)^2\,\sin(0.02\,(-19+x)).$$

- Punti in cui $f(x)$ è continua ma non derivabile, non ve ne sono.
- Vi sono infiniti punti estremali. Noto il polinomio di Taylor $t(x)$ per $f'(x)$ nel punto $x = 1950$, la stima del punto di stazionarietà si ottiene risolvendo l' equazione $t(x) = 0$. Si ottiene $x_1 \simeq 1988.08$, $f(x_1) \simeq 0.255923$. Dato che la derivata è positiva per $[1988, 2000]$ e negativa in $[1900, 1950]$, il punto x_1 è un punto di massimo relativo.
- Non vi sono asintoti.
- Grafico della funzione



- Grafico della funzione e dei dati osservati, nell' intervallo [1600,2000].



- Funzione
$$q(x) = 0.25 \sin(0.02(x - 19)).$$

- Integrale indefinito:
$$Q(x) = -25 \cos(x/50 - 19/50)/2 = -11.608 \cos(0.02x) - 4.6365 \sin(0.02x).$$
$$I = \{Q(x) + C\}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Integrali definiti:
$$V(a, b) = -1.31354;$$
$$V(b, c) = -18.5447;$$
$$V(c, d) = 16.7482.$$

Test 2 Domanda numero 14: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x \to 1} \ln x = 0.$$

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - 1| < \delta \Rightarrow |\ln x| < \epsilon). \tag{4}$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\ln x| < \epsilon,$$

ossia

$$-\epsilon < \ln x < \epsilon;$$

la soluzione è:

$$\exp(-\epsilon) < x < \exp(\epsilon),$$

ossia

$$\exp(-\epsilon) - 1 < x - 1 < \exp(\epsilon) - 1.$$

Perciò ponendo ad esempio

$$\delta = min(|\exp(-\epsilon) - 1|, |\exp(\epsilon) - 1|),$$

la (4) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione di due variabili*

$$z(x, y) = f(x, y) = x^2 + y^2. \tag{5}$$

Domanda numero 15: *Qual è il dominio della funzione?* $\boxed{1}$: $(-\infty, +\infty) \times [-y_m, y_m]$; $\boxed{2}$: $[-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty)$; $\boxed{3}$:

$(-\infty,+\infty)\times[-\infty,+\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\textit{Valore: 6}}$.

Domanda numero 16: *Schizzare un grafico della curva di livello* $z=2$. *nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 17: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 18: *Quanto vale* $\frac{\partial f}{\partial x_2}$?

$\frac{\partial f}{\partial x_2}$ =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Si vuole approssimare ∇f *nel triangolo di vertici* $P_1=(0,0)$, $P_2=(0,2)$, $P_3=(2,0)$, *calcolando le derivate parziali della funzione* $z=2x+2y$, *il cui grafico è il piano passante per i punti* $(P_i, f(P_i))$, $i=1,2,3$.

Domanda numero 19: *Quanto vale* $z_x=\partial z/\partial x$?

---

z_x =

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 20: *Quanto vale* $z_y=\partial z/\partial y$?

---

z_y =

Valore: 8.
Sia $R = (1, 1)$.
Domanda numero 21: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial x - z_x$*?*
21A : ________ *Valore: 4*.
Domanda numero 22: *Quanto vale* $\partial f(R)/\partial y - z_y$*?*
22A : ________ *Valore: 4*.
Sia $S = (0, 1)$.
Domanda numero 23: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial x - z_x$*?*
23A : ________ *Valore: 4*.
Domanda numero 24: *Quanto vale* $\partial f(S)/\partial y - z_y$*?*
24A : ________ *Valore: 4*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y) - x^2 = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = 2. \tag{6}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 25: *Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (6)?*

$y(x)$ =

Valore: 48.
Domanda numero 26: *Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (6)?*

$\bar{y}(x)$ =

Valore: 24.
Domanda numero 27: *Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

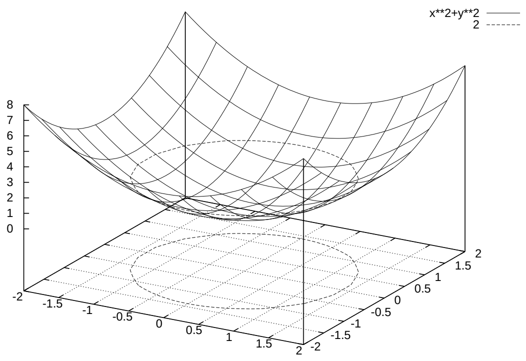
L_1 = *27A* : ________ *Valore: 8*.
Domanda numero 28: *Quanto vale*

$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x)?$$

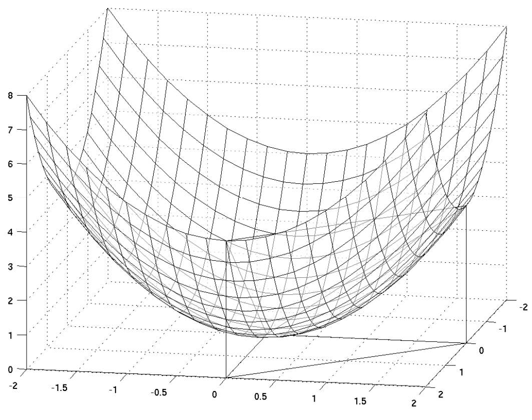
L_2 = *28A* : ________ *Valore: 8*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione e della curva di livello $z = 2$, che è la curva implicita $x^2 + y^2 = 2$, ossia il cerchio di centro l' origine e raggio $\sqrt{2}$.



- Il gradiente è $\nabla f = (2x, 2y)$.
- Le derivate parziali della funzione che rappresenta il piano sono $\partial z/\partial x = 2$, $\partial z/\partial y = 2$.
- Grafico della funzione e del prisma triangolare tramite il quale si approssima il gradiente.



- Risulta: $\partial f(R)/\partial x - z_x = 0$, $\partial f(R)/\partial y - z_y = 0$.
- Risulta: $\partial f(S)/\partial x - z_x = -2$, $\partial f(S)/\partial y - z_y = 0$.
- Le soluzioni dell' equazione $y' = g(x, y)$ sono $y_C(x) = -1/(x + C)$ e $y(x) = 0$.
- La soluzione del problema differenziale è $\bar{y} = -1/(x - 3/2)$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \bar{y}(x) = 0- \, .$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x\to 1+} \bar{y}(x) = \bar{y}(1) = 2.$$
