Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 9 febbraio 2005.

Tema B

CORREZIONE

Nome	□□□□□□□□□□□□
Cognome	□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
Matricola	□□□□□□□□ Aula □ Posto □□□□
Calcolo I □	Calcolo II □

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

Attenzione: chi non affronta l' equazione differenziale, difficilmente passerà l' esame...

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \gamma_1, \\ f_2(x), & \gamma_1 \leq x \leq \gamma_2, \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\gamma_1 = 2.0$, $\gamma_2 = \exp(\pi - 0.1)$, $f_1(x) = -1/\sin(\log 2.0))$,
$f_2(x) = -1/\sin(\log x)$, $f_3(x) = -1/\sin\log((\gamma_1 + \gamma_2)/2)$.

Domanda numero 1*: Qual è il dominio della funzione?*$\mathbb{R}\setminus\{$

1A : $\boxed{}$, *1B :* $\boxed{}$,

1C : $\boxed{}$ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 9}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.
Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui è discontinua. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1=$* *4A :* $\boxed{}$,
$L_1^-=$ *4B :* $\boxed{}$, $L_1^+=$
4C : $\boxed{}$;
$x_2=$ *4D :* $\boxed{}$, $L_2^-=$
4E : $\boxed{}$, $L_2^+=$ *4F :* $\boxed{}$.
$\boxed{\textit{Valore: 6}}$.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: $x_1=$*
6A : $\boxed{}$, $f'_-(x_1)=$ *6B :* $\boxed{}$;
$f'_+(x_1)=$ *6C :* $\boxed{}$; $x_2=$
6D : $\boxed{}$, $f'_-(x_2)=$ *6E :* $\boxed{}$;
$f'_+(x_2)=$ *6F :* $\boxed{}$; $\boxed{\textit{Valore: 12}}$.
Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1=$*
7A : $\boxed{}$; $f(x_1)=$ *7B :* $\boxed{}$;
Massimo o minimo?= *7C :* $\boxed{}$; $x_2=$
7D : $\boxed{}$; $f(x_2)=$ *7E :* $\boxed{}$;
Massimo o minimo?= *7F :* $\boxed{}$; $x_3=$
7G : $\boxed{}$; $f(x_3)=$ *7H :* $\boxed{}$;
Massimo o minimo?= *7I :* $\boxed{}$; $\boxed{\textit{Valore: 42}}$.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è

verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1=$ 8A : ☐; $a_1=$ 8B : ☐; $b_1=$ 8C : ☐; $c_1=$ 8D : ☐; $x_2=$ 8E : ☐; $a_2=$ 8F : ☐; $b_2=$ 8G : ☐; $c_2=$ 8H : ☐; $x_3=$ 8I : ☐; $a_3=$ 8J : ☐; $b_3=$ 8K : ☐; $c_3=$ 8L : ☐.*

Valore: 24.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq \gamma_2, \\ f_3(x), & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* 1 : *No, perché è discontinua.*; 2 : *Si, perché è discontinua.*; 3 : *No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.*; 4 : *Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.*; 5 : *Nessuna delle precedenti risposte è valida.*; Valore: 2.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.

Sia $a = 0,\ b = 1,\ c = 2,\ d = \gamma_2 + 1,\ V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx.$

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a, b)=$

12A : $\boxed{}$; $V(b, c)=$ *12B :* $\boxed{}$;

$V(c, d)=$ *12C :* $\boxed{}$. $\boxed{\textit{Valore: 24}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

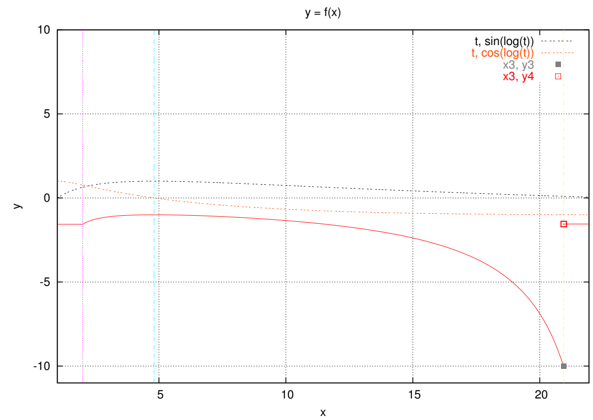
Poniamo $\bar{x}_1 = 2.0$, $\bar{x}_2 = \exp(\pi - 0.1) \simeq 20.939$, $\bar{x}_3 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2 \simeq 11.469$, $\bar{x}_4 = \exp(\pi/2) \simeq 4.8104$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq$ -1.5650, $\bar{y}_2 = f(\bar{x}_2) \simeq$ -10.0167, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq$ -1.5487, $\bar{y}_4 = f(\bar{x}_4) \simeq$ -1.0000.

Nota:

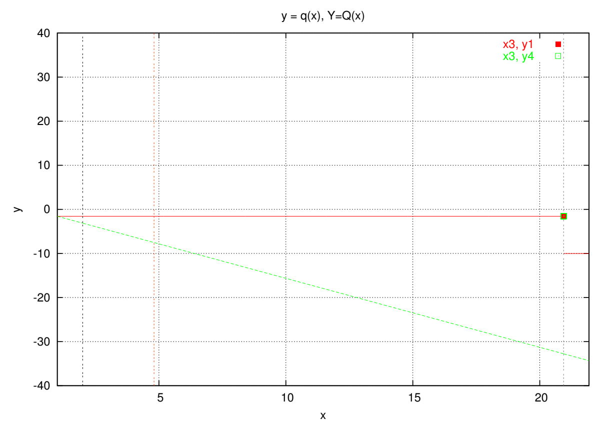
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R}$.
- Risulta
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \bar{y}_1, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione è definita in ogni punto.
- La funzione non è continua in $x_1 = \bar{x}_2$, $f'_-(x_1) = \bar{y}_2$, $f'_+(x_1) = \bar{y}_3$.
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} (\cot(\log(x))\ \csc(\log(x)))/x, & \text{se } \bar{x}_1 < x < \bar{x}_2, \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, in $x_1 = \bar{x}_1$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 0.94206$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < \bar{x}_1$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \bar{x}_2$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, minimo relativo; $x_2 = 4.8104$, $f(x_2) = \bar{y}_4$, massimo relativo; $x_3 = \bar{x}_3$, $f(x_3) = \bar{y}_3$, minimo relativo.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = \bar{y}_1$; $x_2 = +\infty$, $y = \bar{y}_2$.

- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1 \cdot x, & se \quad x \leq \bar{x}_2, \\ \bar{y}_3 \cdot x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_2 & altrove. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = -\csc(\log(2)) \simeq -1.5650;$$

$$V(b,c) = V(a,b);$$

$$V(c,d) = -\csc(\frac{1}{10}) - \left(-2 + e^{-\left(\frac{1}{10}\right)+\pi}\right)\csc(\log(2)) \simeq -39.656.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione reale. Dimostrare che se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = x_0,$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b.$$

$\boxed{\textit{Valore: 32}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Dobbiamo dimostrare che $\forall\delta > 0$ esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $|f(a_n) - b| < \delta$, $\forall n > M$.
Poiché

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b,$$

fissato δ, esiste ϵ_1 t.c. $(\forall x)(|x - x_0| < \epsilon_1)$ si ha $|f(x) - b| < \delta$.
Sia N_1 tale che $\forall n > N_1$ $|a_n - x_0| < \epsilon_1$. Allora, se $M = N_1$, abbiamo la tesi.
QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0,4]^2$.
Domanda numero 14: *Quanto vale $\partial f/\partial x_1$?*

$\partial f/\partial x_1 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 15: *Quanto vale $\partial f/\partial x_2$?*

$\partial f/\partial x_2 =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale* H_{11}*?*

H_{11} =

Valore: 4.

Domanda numero 17: *Quanto vale* H_{12}*?*

H_{12} =

Valore: 4.

Domanda numero 18: *Quanto vale* H_{21}*?*

H_{21} =

Valore: 4.

Domanda numero 19: *Quanto vale* H_{22}*?*

H_{22} =

Valore: 4.

Domanda numero 20: *Quali sono i punti di stazionarietà di* $f(x, y)$ *in* $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *di* z*?* $\mathbf{x}_1$=(20A : [ ],
20B : [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= 20C : [ ];
$\mathbf{x}_2$=(20D : [ ],
20E : [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= 20F : [ ];
$\mathbf{x}_3$=(20G : [ ],
20H : [ ] $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= 20I : [ ];
Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$ *sul bordo del dominio?* 21A : [ ] *Valore: 10*.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$ *in* D*?*
22A : [ ] *Valore: 4*.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di* $f(x_1, x_2)$ *in* D*?*
23A : [ ] *Valore: 4*.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$ in D?*
24A : [ ] *Valore: 4*.
Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$ in D?*
25A : [ ] *Valore: 4*.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$g(x, y) = 5x^2 - 9y'' - 4x - 6y' + 5 = 0, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 2. \tag{3}$$

che si ottiene da $f(x, y)$, interpretando formalmente gli esponenti della base y come ordini di derivazione. N.B.: $f(x, y) = f(\mathbf{x})$, posto $\mathbf{x} = (x, y)$.
Domanda numero 26: *Qual è la forma canonica dell'equazione differenziale (3)?*

---

eq =

Valore: 10.
Domanda numero 27: *Quali sono le soluzioni generali $y(x)$ dell'equazione (3)?*

$y_1(x)$ =

$y_2(x)$ =

Valore: 80.
Domanda numero 28: *Qual è la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ del problema (3)?*

$\bar{y}(x)$ =

Valore: 24.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

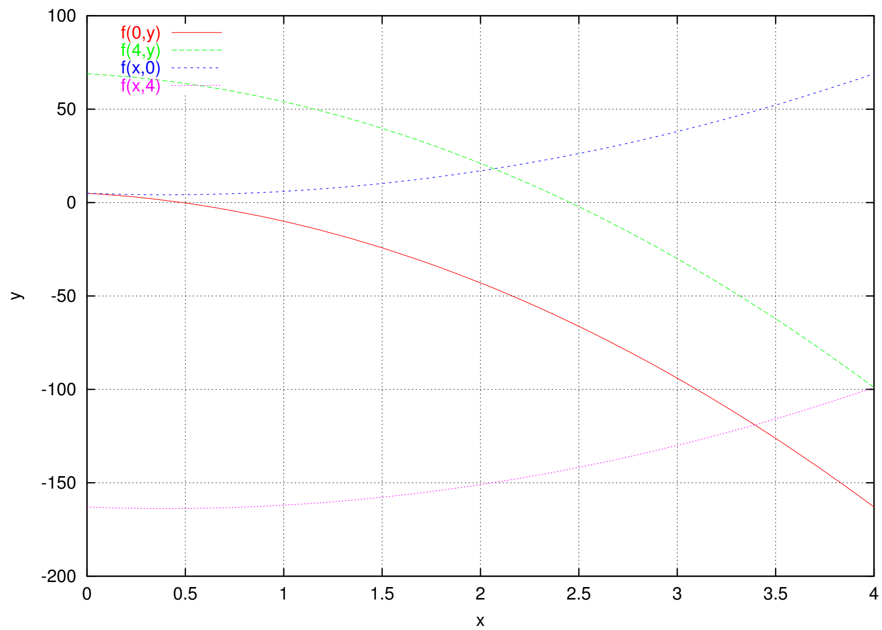
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (10x_1 - 4, -18x_2 - 6)^T.$$

- Hessiano:
$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà in $\mathbb{R}^2$ è $x_1 = (2/5, -1/3)$, $f(x_1) = 5.2$, che è punto di sella della funzione, dato che $\det(H) < 0$, $H_{11} > 0$.

- Il bordo del dominio è l' insieme
$B = \{(x, y) : x = 0, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x, y) : x = 4, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x, y) : 0 \le x \le 4, y = 0\} \cup \{(x, y) : 0 \le x \le 4, y = 4\}$.

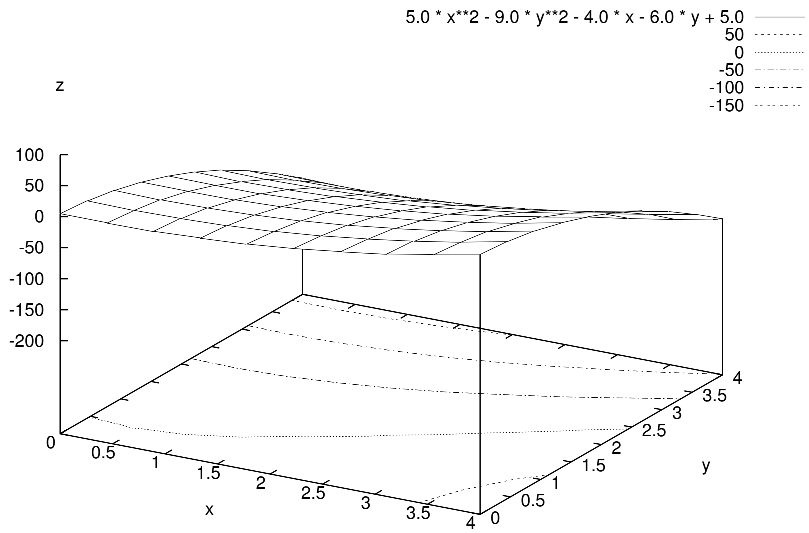
  I grafici di $f(x, y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.



  Il massimo di $f(x, y)$ su B è 69, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali sono: $\min_{x \in D} f$ = -163.80, $\max_{x \in D} f = 69$, $\inf_{x \in D} f$ = -163.80, $\sup_{x \in D} f = 69$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (3) da risolvere è:

$$-5y'' - 6y' + 4x^2 - 4x + 5 = 0, \tag{4}$$

  La soluzione generale è:

$$y(x) = \frac{25\,x}{24} - \frac{5\,x^2}{12} + \frac{x^3}{9} - C_1\frac{3}{4}\,e^{-4\,x/3} + C_2.$$

- La soluzione del problema è:

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{288}(495 - 207e^{-4\,x/3} + 300\,x - 120\,x^2 + 32\,x^3)$$