Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 26 giugno 2002.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.
Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.
La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.
La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.
Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Prima parte.

Test 1 *Studiare la funzione*

$$f(x) = e^{|\lambda|x} g(x), \quad g(x) = (\cos(\theta x) + \sin(\theta x)), \tag{1}$$

dove $\lambda = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$. *Questa funzione è la soluzione di un'equazione differenziale del tipo* $au_{xx} + bu_x + cu = 0$ *e rappresenta l'andamento di un sistema soggetto ad oscillazioni armoniche [1].*

Domanda numero 1*: Qual è il dominio della funzione?*
$\mathbb{R}\backslash\{1A$: $\boxed{}$, $1B$: $\boxed{}\}$
$\boxed{\textit{Valore: 7}}$.

Domanda numero 2*: Qual è la periodicità p della funzione $g(x)$? $p =$*
2A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 3*: Quanto vale il limite per $x \to +\infty$?*
3A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 4: *Quanto vale il limite per $x \to -\infty$?*
4A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Studiare i limiti nei punti x_i in cui la funzione non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 5: *Punti x_i: x_1=* *5A* : $\boxed{}$
L_1^+= *5B* : $\boxed{}$, L_1^-=
5C : $\boxed{}$,
x_2= *5D* : $\boxed{}$, L_2^+=
5E : $\boxed{}$, L_2^-= *5F* : $\boxed{}$.
$\boxed{\textit{Valore: 21}}$.
Domanda numero 6: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Domanda numero 7: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua, ma non derivabile: x_1=* *7A* : $\boxed{}$ $f(x_1)$=
7B : $\boxed{}$ x_2= *7C* : $\boxed{}$ $f(x_2)$=
7D : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 8: *I punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, nell'intervallo* $[0, 2]$ *sono compresi nell'intervallo:* $\boxed{1}$: $(0, 0.5)$; $\boxed{2}$:*(0.5,1);* $\boxed{3}$: $(1, 1.5)$; $\boxed{4}$:*(1.5,2);* $\boxed{5}$: *Non ve ne sono.;* $\boxed{\textit{Valore: 10}}$.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).
Domanda numero 9: *Asintoti: x_1=* *9A* : $\boxed{}$
a_1= *9B* : $\boxed{}$ b_1= *9C* : $\boxed{}$
c_1= *9D* : $\boxed{}$ x_2= *9E* : $\boxed{}$
a_2= *9F* : $\boxed{}$ b_2= *9G* : $\boxed{}$
c_2= *9H* : $\boxed{}$ x_3= *9I* : $\boxed{}$
a_3= *9J* : $\boxed{}$ b_3= *9K* : $\boxed{}$
c_3= *9L* : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 42}}$.

Domanda numero 10: *In quale dei seguenti intervalli la funzione è crescente?* $\boxed{1}$ *: [0,1];* $\boxed{2}$ *: [1,2];* $\boxed{3}$ *: Nessuno dei precedenti;*
$\boxed{\textit{Valore: 4}}$.
Domanda numero 11: *Schizzare un grafico della funzione, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

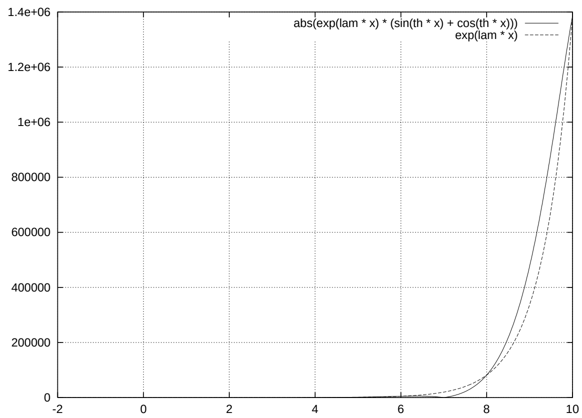
$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.
Domanda numero 12: *Quanto vale q tale che* $g(x) = O(x^q)$*, per* $x \to +\infty$*?* $\boxed{1}$ *: -1;* $\boxed{2}$ *: 0;* $\boxed{3}$ *: 1;* $\boxed{4}$ *: 2;* $\boxed{5}$ *: 3;*
$\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 13: *Qual è l'integrale indefinito di* $e^{-|\lambda|x}f(x)$*?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Domanda numero 14: *Sia* $I(a,b) = \int_a^b e^{-|\lambda|x}f(x)dx$. $I(0,1)=$
14A : $\boxed{}$ $I(1,2)=$ *14B :* $\boxed{}$
$I(-1,0)=$ *14C :* $\boxed{}$ $I(-2,-1)=$
14D : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 32}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$.
- Il periodo di $g(x)$ è $p = 8$.

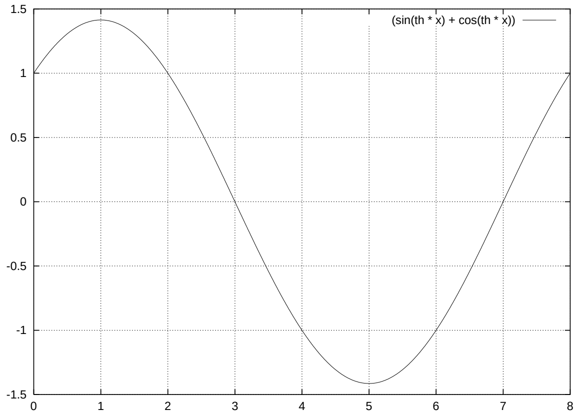
- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \text{non esiste}, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$
- Non vi sono punti in cui la funzione non è derivabile.
- La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Non vi sono altri asintoti.
- $$y'(x) = \exp(\sqrt{(}2)x)((\pi/4 + \sqrt{(}2)) \cos(\pi x/4) + (\sqrt{(}2) - \pi/4) \sin(\pi x/4));$$
- Non vi sono punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile.
- Nell'intervallo [0,2] la derivata non ha punti di stazionarietà.
- La funzione è crescente nell'intervallo [0,1].
- $g(x) = O(1)$ per $x \to \infty$.
- Grafico della funzione.



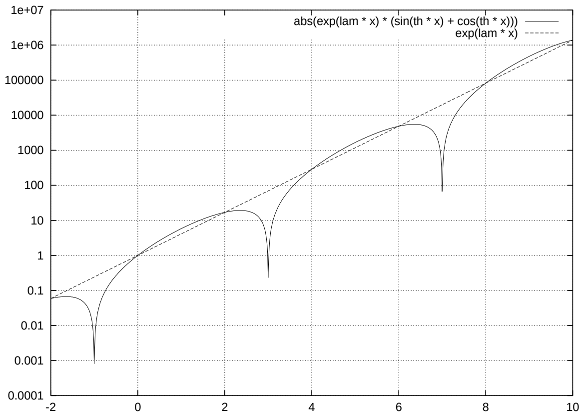
Non è molto comprensibile. Ricordando che la funzione

$$\cos(\theta t) + \sin(\theta t)$$

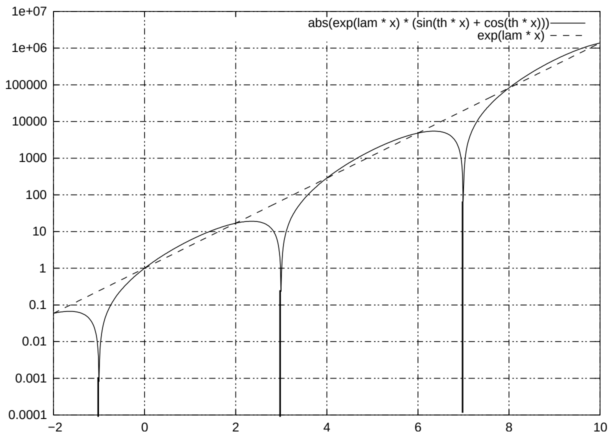
è periodica di periodo $p = 8$, e il suo grafico è il seguente:



ci conviene plottare in scala semilogaritmica il valore assoluto della funzione; otteniamo il grafico:



Si noti che nei punti in cui $g(x) = 0$, la funzione è nulla, anche se nel grafico non si vede! Correggendo “a mano” si può ottenere una figura piú fedele:



- $$\int g(x)dx = 4\sin(\pi x/4)/\pi - 4\cos(\pi x/4)/\pi.$$

  $I(0,1) = 4/\pi \simeq 1.2732,$

  $I(1,2) = 4/\pi \simeq 1.2732,$

  $I(-1,0) = (4\sqrt(2) - 4)/\pi \simeq 0.52739,$

  $I(-2,-1) = (4 - 4\sqrt(2))/\pi \simeq -0.52739.$

Test 2 Domanda numero 15: *Usando la definizione di derivata, dimostrare che se f e g sono derivabili in I, allora per ogni $x \in I$:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

$\boxed{\text{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che per ogni $x \in I$

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \quad (3)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x)).
\end{aligned}$$

Perciò, visto che f e g sono derivabili (e quindi continue) in I, risulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&f'(x)g(x) + g'(x)f(x).
\end{aligned}$$

QED

Test 3 *Risolvere l'equazione differenziale*

$$u_{tt} + 4u_t + 5u = 0, \quad t \in [0, T], T = 100, \tag{4}$$

Essa governa l'andamento di un sistema soggetto ad oscillazioni smorzate [1].
Domanda numero 16: *Qual è la soluzione generale, $u^*(t)$, dell'equazione (4)?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Consideriamo le condizioni iniziali

$$u(0) = u_0 = 1, u'(0) = u'_0 = -2. \tag{5}$$

Domanda numero 17: *Qual è la soluzione, $u(t)$, del problema risultante?*

$\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Domanda numero 18: *Quanto vale $u(1)$?*
18A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 19: *Quanto vale $u(2)$?*
19A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 20: *Quanto vale $u(3)$?*
20A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$u^*(t) = \exp(-2t)(c_1 \cos t + c_2 \sin t).$$

Imponendo le condizioni iniziali, otteniamo:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0,$$

$$u(t) = \exp(-2t)\cos t.$$

$u(1) = \exp(-2)\cos 1 \simeq 0.073122$, $u(2) = \exp(-4)\cos 2 \simeq$ -0.007622,
$u(3) = \exp(-6)\cos 3 \simeq$ -0.00245395.

Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sin(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2},$$

detta comunemente funzione "sombrero".
Calcolare il gradiente $\nabla f(x_1, x_2) = (f_{x_1}, f_{x_2}) = (J_1, J_2)$*.*
Domanda numero 21*: Quanto vale* J_1*?*

$J_1 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 22*: Quanto vale* J_2*?*

$J_2 =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 23*: Dimostrare che* $f(x, y) =$*cost. se e solo se* $x^2 + y^2 =$*cost.*

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Sia $\mathbf{a} = (1, 2)$.
Domanda numero 24*: Quanto vale* $J_1(\mathbf{a})$*?*
24A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 25*: Quanto vale* $J_2(\mathbf{a})$*?*
25A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 26*: Quanto vale il massimo di* $f(x_1, x_2)$*?*
26A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 27*: Quanto vale il minimo di* $f(x_1, x_2)$*?*
27A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Domanda numero 28: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*
28A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 29: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*
29A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Domanda numero 30: *Schizzare un grafico delle curve di livello $f(\mathbf{x}) = c$, per $c = 0.8, 0.4, 0.2$, $-2\pi < x < 2\pi$, $-2\pi < y < 2\pi$, nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

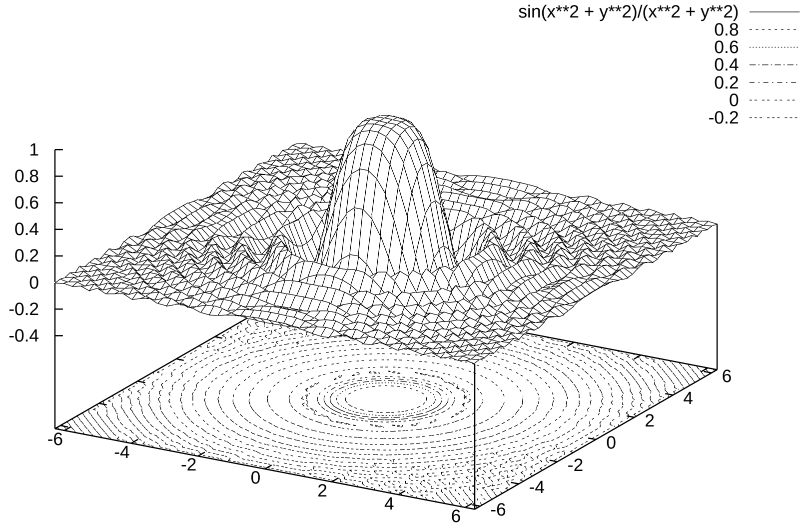
Abbiamo:
Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Sia $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$.

$$J(\mathbf{x}) = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) =$$
$$\{\frac{2\,x_1\,\cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2\,x_1\,\sin(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$
$$\frac{2\,x_2\,\cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{2\,x_2\,\sin(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\}$$

$f(x, y)$ è costante sse $\cos(g(x, y))/g(x, y)$ =cost., ossia $g(x, y) = x^2 + y^2$ =cost.

$$J(\mathbf{a}) =$$
$$\{\frac{2\,\cos(5)}{5} - \frac{2\,\sin(5)}{25}, \frac{4\,\cos(5)}{5} - \frac{4\,\sin(5)}{25}\}$$
$$(0.190179, 0.380358)$$

$\max_{x\in D} f = 1$, $\min_{x\in D} f =$ -1, $\sup_{x\in D} f = 1$, $\inf_{x\in D} f =$ -1.
Grafico della funzione e delle sue curve di livello:



Riferimenti bibliografici

[1] R. Haberman, *Mathematical Models*, SIAM, Philadelphia, PA, 1998. Unabridged republication of Prentice-Hall book, Englewood Cliffs, NJ, 1977.