Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 19 gennaio 2005.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo.* **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\boxed{\ }$. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ e virgola mobile=$\boxed{\ }\boxed{\ }$. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ $\boxed{\text{E}}$ $\boxed{\ }\boxed{\ }$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Vogliamo analizzare il comportamento della funzione*

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & 0 \leq x \leq \ln(\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $f_1(x) = -1/(\tan(2))$, $f_2(x) = -1/(\tan(2\exp(x)))$, $f_3(x) = -1/(\tan(2\pi - 1/5))$.

Domanda numero 1*: Qual è il dominio della funzione?*$\mathbb{R}\setminus\{$

1A : $\boxed{\qquad\qquad}$, *1B :* $\boxed{\qquad\qquad}$,

1C : $\boxed{\qquad\qquad}$ $\}$ $\boxed{\textit{Valore: 15}}$.

Domanda numero 2*: Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*

2A : $\boxed{\qquad\qquad}$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3*: Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*

3A : $\boxed{\qquad\qquad}$ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.

Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x\to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x\to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{2}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.

Domanda numero 4: *Punti x_i: $x_1=$ 4A : [ ], $L_1^-=$ 4B : [ ], $L_1^+=$ 4C : [ ]; $x_2=$ 4D : [ ], $L_2^-=$ 4E : [ ], $L_2^+=$ 4F : [ ].* *Valore: 6*.

Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

Valore: 16.

Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: $x_1=$ 6A : [ ], $f(x_1)=$ 6B : [ ]; $f'_-(x_1)=$ 6C : [ ]; $f'_+(x_1)=$ 6D : [ ]; $x_2=$ 6E : [ ], $f(x_2)=$ 6F : [ ]. $f'_+(x_2)=$ 6G : [ ]; $f'_-(x_2)=$ 6H : [ ];* *Valore: 8*.

Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. $x_1=$ 7A : [ ]; $f(x_1)=$ 7B : [ ]; Massimo o minimo?= 7C : [ ]; $x_2=$ 7D : [ ]; $f(x_2)=$ 7E : [ ]; Massimo o minimo?= 7F : [ ];* *Valore: 20*.

Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).

Domanda numero 8: *Asintoti: $x_1=$ 8A : [ ]; $a_1=$ 8B : [ ]; $b_1=$ 8C : [ ]; $c_1=$ 8D : [ ]; $x_2=$*

8E : ☐; a_2= *8F :* ☐; b_2=
8G : ☐; c_2= *8H :* ☐; x_3=
8I : ☐; a_3= *8J :* ☐; b_3=
8K : ☐; c_3= *8L :* ☐.

Valore: 24.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < \ln(\pi - 1/10), \\ f_3(x), & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

Domanda numero 10: *La funzione $q(x)$ è integrabile?* 1 *: No, perché è discontinua.;* 2 *: Si, perché è discontinua.;* 3 *: No, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* 4 *: Si, perché è limitata e discontinua in un numero finito di punti.;* 5 *: Nessuna delle precedenti risposte è valida.;* *Valore: 2*.

Domanda numero 11: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

Valore: 20.

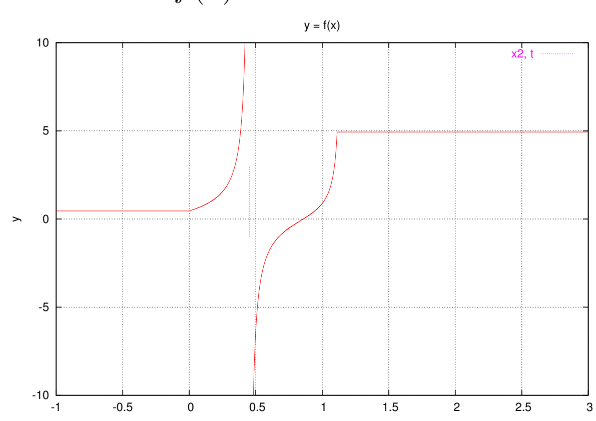
Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 12: *Calcolare i valori:* $V(a, b)$=
12A : ☐; $V(b, c)$= *12B :* ☐;
$V(c, d)$= *12C :* ☐. *Valore: 24*.

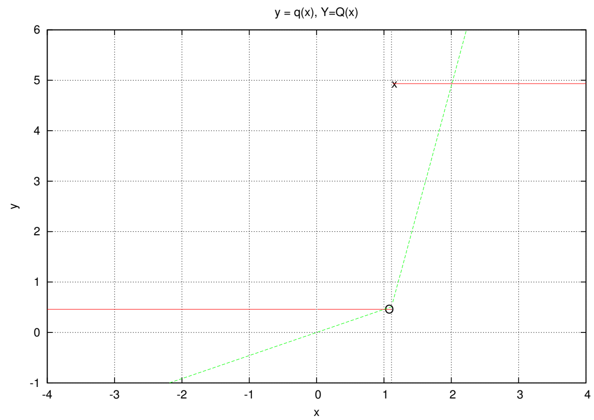
Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Poniamo $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \ln(\pi/2) \simeq 4.5158 \times 10^{-1}$, $\bar{x}_3 = \ln(\pi - 1/10) \simeq 1.124$, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) \simeq 4.5766 \times 10^{-1}$, $\bar{y}_3 = f(\bar{x}_3) \simeq 4.9332$.

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R} \backslash \{\ln(\pi/2)\}$.
- Risulta
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \bar{y}_1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \bar{y}_3.$$
- La funzione non è definita nel punto $x_1 = \bar{x}_2$,
$$\lim_{x \to \bar{x}_2 -} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \bar{x}_2 +} f(x) = -\infty.$$
- La derivata è:
$$y'(x) = \begin{cases} 2\, e^x \csc(2\, e^x)^2, & \text{se } 0 < x < \log(2\pi - 1/10),\ x \neq \ln(\pi/2), \\ 0 & \textit{altrove.} \end{cases}.$$
- La funzione è continua, ma non derivabile, nei punti: $x_1 = 0$, $f'_-(x_1) = 0$, $f'_+(x_1) = 2.4189$ $x_2 = \ln(\pi - 1/10)$, $f'_-(x_2) = 8.0228 \times 10^1$, $f'_+(x_2) = 0$.
- Secondo la definizione, tutti i punti $x < 0$ sono punti di minimo relativo e i punti $x > \ln(\pi - 1/10)$ sono punti di massimo relativo, tuttavia i punti estremali non banali sono $x_1 = \bar{x}_1$, $f(x_1) = \bar{y}_1$, $x_2 = \bar{x}_3$, $f(x_2) = \bar{y}_3$.
- Asintoti: $x_1 = -\infty$, $y = -1/(2\tan(1))$; $x_2 = \bar{x}_2$, asintoto $x = \bar{x}_2$; $x_3 = +\infty$, $y = -1/(2\tan(2\pi - 1/5))$.
- Grafico della funzione $f(x)$.



- Grafico della funzione $q(x)$:



La funzione è integrabile perché limitata e continua nel suo dominio, tranne un numero finito di punti.

- L' integrale indefinito di $q(x)$ è

$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$

dove

$$Q(x) = \begin{cases} \bar{y}_1\, x, & \textit{se} \quad x \le \log(\pi - 1/10), \\ \bar{y}_3\, x + (\bar{y}_1 - \bar{y}_3)\bar{x}_3 & \textit{altrove}. \end{cases}.$$

- Gli integrali definiti valgono:

$$V(a,b) = -\cot(2) \simeq 0.45766;$$

$$V(b,c) = -\cot(\frac{1}{5})\ (-2+\alpha)) - \cot(2)\ (-1+\alpha) \simeq 4.4302;$$

dove $\alpha = \log(-\left(\frac{1}{10}\right) + \pi)$,

$$V(c,d) = \cot(\frac{1}{5}) \simeq 4.9332.$$

Test 2 Domanda numero 13: *Usando la sola definizione di limite, dimostrare che*

$$\lim_{x \to 1/9} \cos(x) = \cos(1/9).$$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(|x - 1/9| < \delta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(1/9)| < \epsilon). \qquad (3)$$

Dobbiamo risolvere la disuguaglianza

$$|\cos(x) - \cos(1/9)| < \epsilon;$$

ossia

$$-\epsilon < \cos(x) - \cos(1/9) < \epsilon;$$

per semplicità supponiamo $\epsilon < 1/1000$. Le soluzioni sono:

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) < x < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon).$$

Quindi

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9 < x - 1/9 < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9.$$

Se $\epsilon < 1/9 - \cos(1/9)$, essendo

$$\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9 < 0 < \arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9,$$

$$|\arccos(\cos(1/9) - \epsilon) - 1/9| < |\arccos(\cos(1/9) + \epsilon) - 1/9|,$$

ponendo

$$\mu = min(1/9 - \cos(1/9), \epsilon), \quad \delta = |\arccos(\cos(1/9) - \mu) - 1/9|,$$

la (3) è vera. QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *Consideriamo la funzione*

$$z = f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 5.$$

Nel dominio $D = [0, 4]^2$.
Domanda numero 14: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_1$*?*

$\partial f/\partial x_1 =$

Valore: 8.

Domanda numero 15: *Quanto vale* $\partial f/\partial x_2$*?*

$\partial f/\partial x_2 =$

Valore: 8.

Calcolare la matrice Hessiana

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

Domanda numero 16: *Quanto vale* H_{11}*?*

$H_{11} =$

Valore: 4.

Domanda numero 17: *Quanto vale* H_{12}*?*

$H_{12} =$

Valore: 4.

Domanda numero 18: *Quanto vale* H_{21}*?*

$H_{21} =$

Valore: 4.

Domanda numero 19: *Quanto vale* H_{22}*?*

$H_{22} =$

Valore: 4.

Domanda numero 20: *I punti di stazionarietà di* $f(x, y)$ *sono* $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, *di z.* $\mathbf{x}_1$=(*20A :* ☐,
20B : ☐ $)^T$, $f(\mathbf{x}_1)$= *20C :* ☐;
$\mathbf{x}_2$=(*20D :* ☐,
20E : ☐ $)^T$, $f(\mathbf{x}_2)$= *20F :* ☐;
$\mathbf{x}_3$=(*20G :* ☐,
20H : ☐ $)^T$, $f(\mathbf{x}_3)$= *20I :* ☐;

Valore: 34.

Domanda numero 21: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$ sul bordo del dominio?* *21A :* [ ] *Valore: 10*.

Domanda numero 22: *Quanto vale il massimo di $f(x_1, x_2)$?*
22A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 23: *Quanto vale il minimo di $f(x_1, x_2)$?*
23A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 24: *Quanto vale l'estremo superiore di $f(x_1, x_2)$?*
24A : [ ] *Valore: 2*.

Domanda numero 25: *Quanto vale l'estremo inferiore di $f(x_1, x_2)$?*
25A : [ ] *Valore: 2*.

Si vuole risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{f(x,y) + 4x + 6y - 5}{x^2}; \tag{4}$$

N.B.: $f(x,y) = f(\mathbf{x})$, posto $\mathbf{x} = (x,y)$.

Domanda numero 26: *Quali sono le soluzioni $y(x)$ dell'equazione (4)?*

$y_1(x) =$

$y_2(x) =$

Valore: 80.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Abbiamo:

- Gradiente:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (10x_1 - 4, 18x_2 - 6)^T.$$

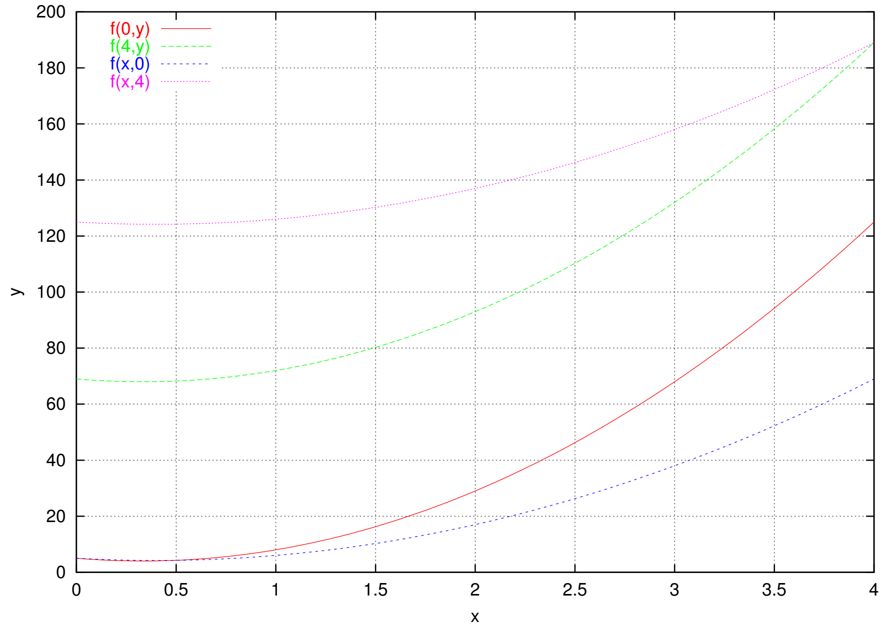
- Hessiano:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

- L' unico punto di stazionarietà è $x_1 = (2/5, 1/3)$, $f(x_1) = 0$, che è minimo relativo della funzione, dato che $\det(H) > 0$, $H_{11} > 0$, (nonché minimo assoluto).

- Il bordo del dominio è l' insieme
  $B = \{(x,y) : x = 0, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : x = 4, 0 \le y \le 4\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 0\} \cup \{(x,y) : 0 \le x \le 4, y = 4\}$.

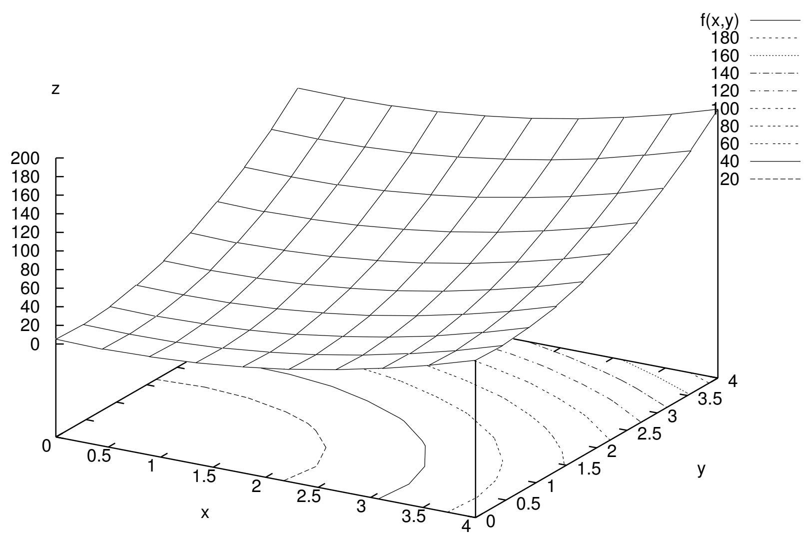
  I grafici di $f(x,y)$ nelle varie componenti del bordo sono disegnati qui sotto.

  Il massimo di $f(x,y)$ su B è 189, che è anche il massimo assoluto della funzione.

- I valori estremali assoluti sono: $\min_{x\in D} f = 3.2$, $\max_{x\in D} f = 189$, $\inf_{x\in D} f = 3.2$, $\sup_{x\in D} f = 189$.

- Grafico della funzione:



- L'equazione differenziale (4) da risolvere è:

$$y' = \frac{5x^2 + 9y^2}{x^2} = 5 + \frac{9y^2}{x^2}. \tag{5}$$

Ponendo $z = y/x$, otteniamo $y' = xz' + z$, ossia nel nostro caso:

$$xz' + z = 5 + 9z^2,$$

da cui

$$z' = \frac{9z^2 - z + 5}{x},$$

e ancora

$$\frac{\mathrm{d}z}{9z^2 - z + 5} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Otteniamo

$$z = \frac{1}{18}(1 + \sqrt{179}\,\tan(\sqrt{179}(C + \log(x))/2)).$$

Infine abbiamo

$$y = \frac{x}{18}(1 + \sqrt{179}\,\tan(\sqrt{179}(C + \log(x))/2)).$$