Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
(Calcolo I, Calcolo II, Esercitazioni di Calcolo)
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 8 settembre 2004.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo I ☐ Calcolo II ☐

Norme generali.

Lasciare sugli attaccapanni borse e indumenti, tenere sul banco *solo* penne, calcolatrice e libretto universitario. Consegnare solo il fascicolo domande e il modulo risposte. Eventuali altri fogli verranno cestinati. Le risposte errate *comportano un punteggio negativo*. **Le risposte non riportate nelle apposite caselle del modulo risposte verranno considerate nulle.** Nulle saranno anche le risposte non esaurientemente giustificate, oppure scritte con grafia poco chiara. Scrivere con inchiostro indelebile nero o bleu. Il candidato si puó ritirare, purché sia passata almeno mezz'ora dall'inizio della prova, restituendo il testo del compito **e il modulo risposte**, dopo aver scritto su **entrambi** in caratteri grandi "Ritirato". La prova viene automaticamente considerata *non* superata e viene allontanato chi viene trovato con libri o appunti a portata di mano, **anche se non sono stati consultati**.

Usare una calcolatrice con display alfanumerico. Sono vietate le calcolatrici con display grafico.

Nei fogli seguenti le risposte vanno date in forma simbolica **e vanno riportate in floating point nel foglio apposito.** Attenzione: nei campi virgola fissa=$\square$. $\square\square\square\square\square$ e virgola mobile=$\square\square$. $\square\square\square\square$ $\boxed{\text{E}}$ $\square\square$, la prima casella è riservata al segno. Rappresentare tutti i risultati in virgola mobile normalizzata con 5 cifre decimali: $\pm a_1.a_2a_3a_4a_5E \pm b_1b_2$, $a_1 \neq 0$.

La risposta "non esiste" si codifica con -1.1111E+11. Ad esempio, "non esistono punti di flesso", si codifica rispondendo x_1 =-1.1111E+11, $f(x_1)$ =-1.1111E+11, x_2 =-1.1111E+11, $f(x_2)$ =-1.1111E+11, etc.

La risposta $+\infty$ si codifica con +9.9999E+99. La risposta $-\infty$ si codifica con -9.9999E+99.

Se una domanda prevede più risposte, relative alle ascisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, **bisogna ordinarle** in modo che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Indicare gli asintoti orizzontali e obliqui usando "infiniti con segno". Ad esempio, dire che $y = 1/(x(x-1))$ ha asintoti $y = 0$ in $x_1 = -\infty$, $x = 0$ in $x_2 = 0$, $x = 1$ in $x_3 = 1$.

Tabella riassuntiva:

Risposta	codice
Non esiste	-1.1111E+11
$+\infty$	+9.9999E+99
$-\infty$	-9.9999E+99

1 Calcolo I

Test 1 *Una prima approssimazione della velocità di un fluido viscoso dentro un tubo infinito di raggio a, parallelo all' asse z è [2, pag. 45]:*

$$y = v_z(r) = -\frac{C}{4\mu}r^2 + A\log r + B,$$

dove A e B sono costanti.
Vogliamo analizzare il comportamento della funzione $y = f(x) = v_z(x)$ in tutto il suo dominio, quando $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ $\mu = 4$.

Domanda numero 1: *Qual è il dominio della funzione?*
1A : $\square$ $< x <$ *1B :* $\square$.
$\boxed{\textit{Valore: 7}}$.

Domanda numero 2: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to -\infty$?*
2A : $\square$ $\boxed{\textit{Valore: 2}}$.

Domanda numero 3: *Quanto vale il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$?*
3A : ☐ $\boxed{\textit{Valore: 5}}$.
Studiare i limiti di $f(x)$ nei punti x_i in cui non è definita. N.B.:

$$\lim_{x \to x_i+} f(x) = L_i^+, \quad \lim_{x \to x_i-} f(x) = L_i^- \tag{1}$$

Se la funzione non è definita, a destra o a sinistra del punto, scrivete che il relativo limite destro o sinistro non esiste.
Domanda numero 4: *Punti x_i: x_1=* *4A :* ☐,
L_1^+= *4B :* ☐, L_1^-=
4C : ☐;
x_2= *4D :* ☐, L_2^+=
4E : ☐, L_2^-= *4F :* ☐.
$\boxed{\textit{Valore: 6}}$.
Domanda numero 5: *Qual è la derivata di $f(x)$?*

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 6: *Punti x_i, $i = 1, \ldots, n$ in cui $f(x)$ è continua (anche solo a sinistra o a destra), ma non derivabile: x_1=*
6A : ☐, $f(x_1)$= *6B :* ☐;
$f'_+(x_1)$= *6C :* ☐; $f'_-(x_1)$=
6D : ☐; x_2= *6E :* ☐, $f(x_2)$=
6F : ☐. $f'_+(x_2)$= *6G :* ☐;
$f'_-(x_2)$= *6H :* ☐; $\boxed{\textit{Valore: 8}}$.
Domanda numero 7: *Punti estremali x_i, $i = 1, \ldots, n$, di $f(x)$. Scrivere "1" se è un punto di massimo, "0" se di minimo. x_1=*
7A : ☐; $f(x_1)$= *7B :* ☐;
Massimo o minimo?= *7C :* ☐; x_2=
7D : ☐; $f(x_2)$= *7E :* ☐;
Massimo o minimo?= *7F :* ☐; $\boxed{\textit{Valore: 20}}$.
Studiare gli asintoti del grafico di $f(x)$, siano le rette $a_i y + b_i x + c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, x_i le ascisse dei punti di tangenza (porre $b_i = 1$ se l' asintoto è verticale, $a_i = 1$ se l' asintoto non è verticale, $x_i = \pm\infty$, se l'asintoto è orizzontale o obliquo).
Domanda numero 8: *Asintoti: x_1=* *8A :* ☐;
a_1= *8B :* ☐; b_1= *8C :* ☐;

$c_1 =$ *8D :* $\boxed{}$; $x_2 =$ *8E :* $\boxed{}$;
$a_2 =$ *8F :* $\boxed{}$; $b_2 =$ *8G :* $\boxed{}$;
$c_2 =$ *8H :* $\boxed{}$. *Valore: 12*.

Domanda numero 9: *Schizzare il grafico della funzione nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

Valore: 80.

Sia

$$q(x) = f(x).$$

Domanda numero 10: *Qual è l'integrale indefinito di $q(x)$?*

Valore: 20.

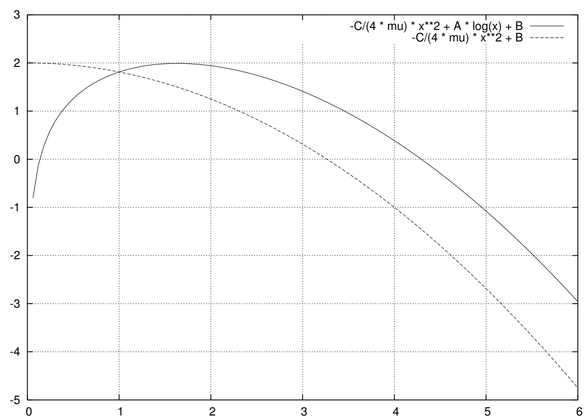
Sia $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $V(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta q(x)dx$.

Domanda numero 11: *Calcolare i valori:* $V(a, b) =$
11A : $\boxed{}$; $V(b, c) =$ *11B :* $\boxed{}$;
$V(c, d) =$ *11C :* $\boxed{}$. *Valore: 24*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è $D(f) = \mathbb{R} =]0, +\infty[$.
- Risulta
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \text{non esiste}, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

- La funzione non è definita nel punto 0.
- La derivata è:
$$y'(x) = A/x - (Cx)/(2\mu).$$
- In nessun punto la funzione è continua, ma non derivabile.
- L' unico punto estremale è $\bar{x} = 2\sqrt{2/3} \simeq 1.63299$, dove $f(\bar{x}) = 3/2 + \log(2\sqrt{2/3}) \simeq 1.99041$.
- Asintoti: il solo asintoto è l' asintoto verticale $x = 0$.
- Grafico della funzione.



- L' integrale indefinito di $q(x)$ è
$$\int q(x)\,\mathrm{d}x = \{Q(x) + D, \quad D \in \mathbb{R}\},$$
dove
$$Q(x) = (-A + B)\;x - \frac{C\,x^3}{12\,\mu} + A\,x\;\log(x).$$
- Gli integrali definiti valgono:
$$V(a,b) = \frac{15}{16} \simeq 0.9375;$$
$$V(b,c) = \frac{9}{16} + \log(4) \simeq 1.9488;$$
$$V(c,d) = -\left(\frac{3}{16}\right) + \log(\frac{27}{4}) \simeq 1.7220.$$

Test 2 Domanda numero 12: *Usando la sola definizione di derivata, dimostrare che se f e g sono derivabili nel punto x, allora*

$$j(x) = h'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

$\boxed{\text{Valore: 16}}$.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

Bisogna dimostrare che

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{s\to 0}\frac{(f+g)(x+s)-(f+g)(x)}{s} = \\ & \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s)-f(x)}{s} + \lim_{s\to 0}\frac{g(x+s)-g(x)}{s} = f'(x)+g'(x).\end{aligned}$$

L' uguaglianza è banalmente vera, in quanto per ogni x in cui f e g sono definite e ogni $s \neq 0$, risulta

$$\frac{h(x+s)-h(x)}{s} = \frac{f(x+s)-f(x)}{s} + \frac{g(x+s)-g(x)}{s}.$$

QED

---

2 Calcolo II

Test 3 *E' dato il potenziale*

$$\phi(x,y) = f(x,y) = (xy)^2, \tag{2}$$

Domanda numero 13: *Qual è il dominio della funzione f?* $\boxed{1}$: $(-\infty,+\infty)\times[-y_m,y_m]$; $\boxed{2}$: $[-\infty,+\infty]\times(-\infty,+\infty)$; $\boxed{3}$: $(-\infty,+\infty)\times[-\infty,+\infty]$; $\boxed{4}$: $(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$; $\boxed{5}$: *Non esiste.*; $\boxed{\text{Valore: 6}}$.

Domanda numero 14: *Schizzare un grafico della curva di livello $f = 2$. nel riquadro sottostante, aggiungendo anche le scale.*

$\boxed{\textit{Valore: 80}}$.

Domanda numero 15: *Quanto vale* $f_x = \partial f/\partial x$*?*

$f_x =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Domanda numero 16: *Quanto vale* $f_y = \partial f/\partial y$*?*

$f_y =$

$\boxed{\textit{Valore: 8}}$.

Vogliamo calcolare la vorticità *[2] di* f*, ossia il* rotore della velocità *[1]*

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = -\nabla\phi.$$

Notare che

$$\mathbf{u} = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) = -(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, 0).$$

Siano

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T,$$

i tre vettori coordinati. Ricordiamo che dati due vettori $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$*, il loro* prodotto vettore *è:*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{e}_1((v_2w_3) - (v_3w_2)) - \mathbf{e}_2((v_1w_3) - (v_3w_1)) + \mathbf{e}_3((v_1w_2) - (v_2w_1)),$$

Perciò se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$*:*

$$\nabla \times \mathbf{u} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} =$$

$$\xi = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) =$$

$$\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3.$$

Domanda numero 17*: Quanto vale* A_1*?* A_1 =
17A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 16}}$.
Domanda numero 18*: Quanto vale* A_2*?* A_2 =
18A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 16}}$.
Domanda numero 19*: Quanto vale* A_3*?* A_3 =
19A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 16}}$.
Domanda numero 20*: Quanto vale* ξ*?* ξ =
20A : $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 32}}$.
Si vuole risolvere il problema differenziale

$$y' = f(x, y)/(x^2 y) + 1 = g(x, y), \quad y(1) = y_0 = -1. \tag{3}$$

nell' intervallo $[1, +\infty[$.
Domanda numero 21*: Quali sono le soluzioni* $y(x)$ *dell'equazione in (3)?*

$y(x)$ =

$\boxed{\textit{Valore: 48}}$.
Domanda numero 22*: Qual è la soluzione particolare* $\bar{y}(x)$ *del problema (3)?*

$\bar{y}(x)$ =

$\boxed{\textit{Valore: 24}}$.
Domanda numero 23*: Quanto vale*

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x)?$$

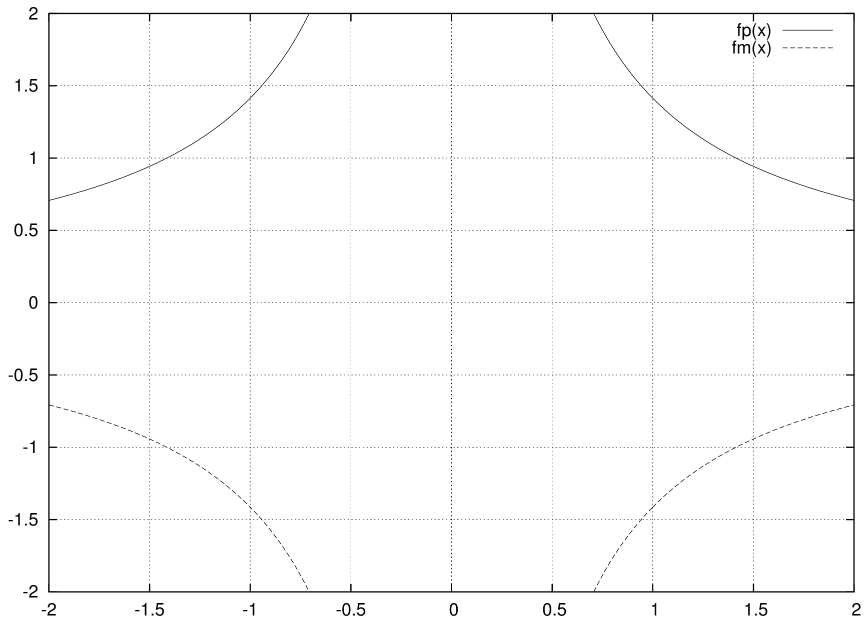
L_1 = *23A :* $\boxed{}$ $\boxed{\textit{Valore: 4}}$.
Domanda numero 24*: Quanto vale il limite* da sinistra

$$L_2 = \lim_{x \to 1+} \bar{y}(x)?$$

$L_2 =$ *24A* : [ ] *Valore: 4*.

Inserire qui i passaggi fondamentali del procedimento risolutivo e i risultati intermedi.

- Il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$.
- Grafico della funzione. La curva di livello $u = 2$, che è la curva implicita $(xy)^2 = 2$ è l' unione delle due curve $y = \sqrt(2/x^2)$, $y = -\sqrt(2/x^2)$, schizzate nella figura sottostante



- Il gradiente è $\nabla\phi = 2(xy^2, yx^2)$, la velocità è $\mathbf{u} = -\nabla\phi = -2(xy^2, yx^2, 0)$.
- Dato che $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0) = -(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, 0), -\nabla\phi = -2(xy^2, xy^2, 0)$, si ottiene

$$A_1 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad A_2 = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0,$$
$$A_3 = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} = -4xy + 4xy = 0.$$

e quindi

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\mathbf{e}_3(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}) = -\mathbf{e}_3(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}) = 0.$$

Questo risultato vale per tutte le funzioni $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ che non dipendono da z (esse hanno derivate miste uguali).

- Le soluzioni dell' equazione $y' = y + 1$ sono $y(x) = C \exp x - 1$.
- La soluzione del problema differenziale è $y(x) = -1$.
- Risulta
$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \bar{y}(x) = -1.$$
- Infine
$$L_2 = \lim_{x \to 1-} \bar{y}(x) = -1.$$

Riferimenti bibliografici

[1] T. M. Apostol, *Calcolo*, vol. 3 - Analisi 2, Bollati Boringhieri, Torino, 1978.

[2] A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer–Verlag, New York, 1990. Prima edizione nel 1979, Springer, New York.