Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 18 maggio 2012.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = -\arctan\left(\frac{3}{x-2}\right). \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 2: *Studiare il comportamento della funzione in un intorno a piacere di $x = 2$.*

Domanda numero 3: *Studiare la convessità della funzione, schizzando anche un grafico.*

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.
- La funzione è continua e derivabile a piacere nel suo dominio.

  Abbiamo:
  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

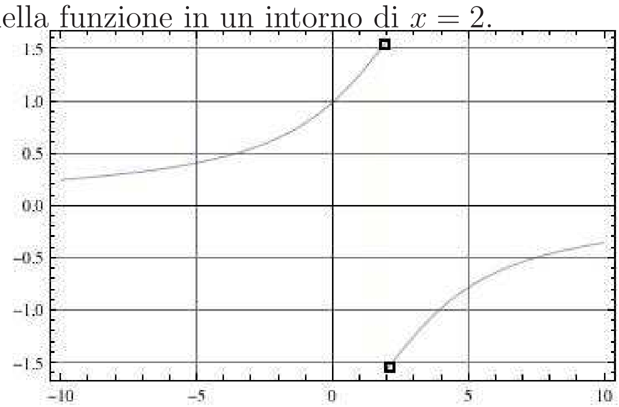
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \pi/2; \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = -\pi/2.$$

- Derivata prima:
$$f'(x) = 3/(x^2 - 4x + 13)$$

- $f'(x) \geq 0$ per ogni x reale.

- $f'(x) \neq 0$ per ogni x. Non ci sono punti di stazionarietà.

- Grafico della funzione in un intorno di $x = 2$.



- Derivata seconda: $-6(x-2)/(x^2-4x+13)^2$. È positiva se $x < 2$, quindi $f(x)$ è convessa per tali valori di x.

Test 2 Domanda numero 4: *Usando solo la definizione di derivata, dimostrare che se* $y = 2x^2 - 1$, *allora* $y' = 4x$.

Risoluzione.
Dato che

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

otteniamo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(2(x+h)^2 - 1) - (2x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0}(4x + 2h) = 4x.$$

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' - 6\,y' + 8y = x; \tag{2}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, *e schizzarne un grafico.*

L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = 2, 4$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y = c_1\,\exp(2x) + c_2\,\exp(4x) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa nella forma $y = Ax + B$ si ottiene risolvendo il sistema

$$A + B + 3/32 = 1, \quad 2A + 4B + 1/8 = 0,$$

ed è quindi

$$y = x/8 + 3/32$$

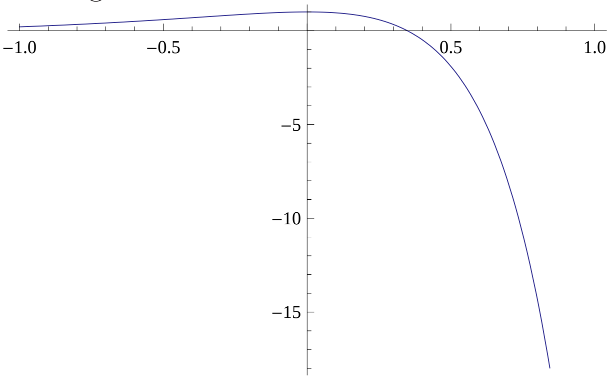
Quindi la soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = c_1\,\exp(2x) + c_2\,\exp(4x) + x/8 + 3/32 \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \frac{1}{32}\left(60e^{2x} - 31e^{4x} + 4x + 3\right)$$

Il suo grafico e' schizzato sotto.



Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 4y^2 - 18x + 4y + 16$$

Domanda numero 6: *Determinarne punti di stazionarietà ed estremali.*

Domanda numero 7: *Calcolare il polinomio di Taylor lineare attorno al punto* $P = (2, 1)$.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$.
La funzione è differenziabile quante volte si vuole.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 2y - 18, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -8y + 2x + 4$$

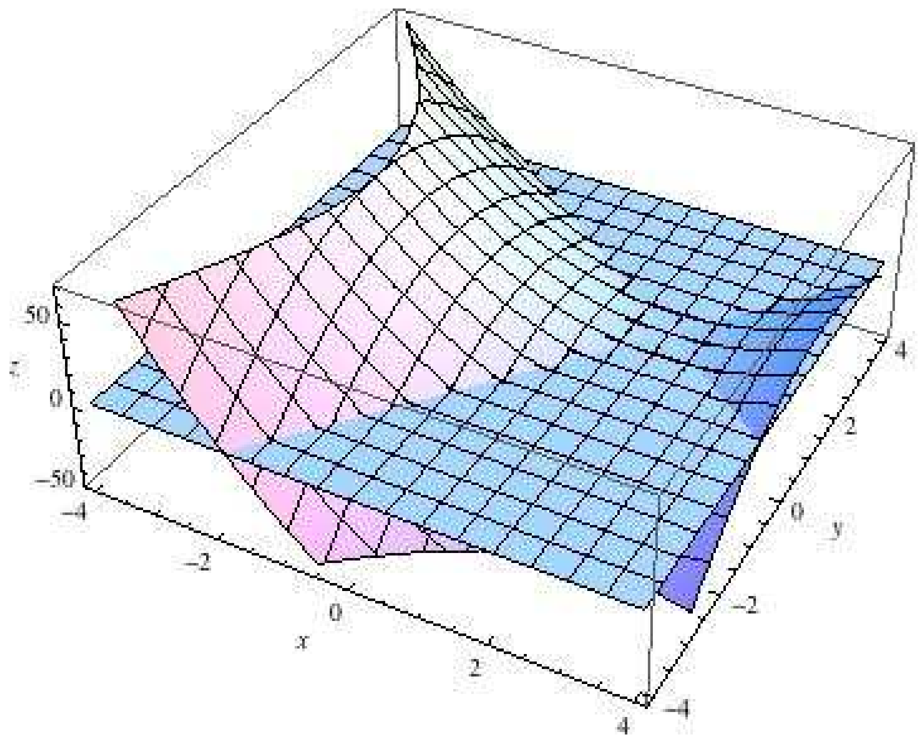
Vi è un unico punto di stazionarietà $\mathbf{x} = (2, 1)^T$, dove $f(2, 1) = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è costante.
Il determinante della matrice Hessiana è negativo, quindi si tratta di un punto di sella.
Dato che il punto in cui si effettua lo sviluppo di Taylor lineare è di stazionarietà, abbiamo

$$t_1(x, y) = 0.$$

Grafico della funzione e del polinomio di Taylor (non richiesto nel compito)



50
z
0
−50
−4
−2
0
x
2
4
−4
−2
0
y
2
4

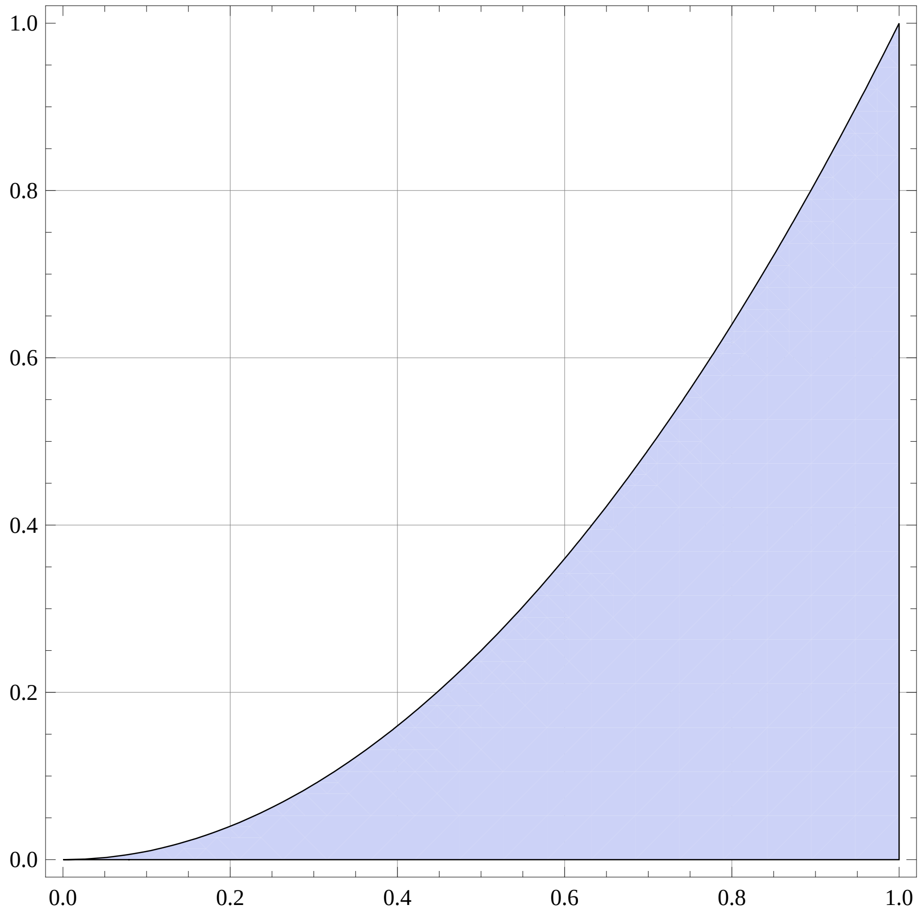
Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int\int_D (x\ \cos y) dxdy, \tag{5}$$

essendo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.
Domanda numero 8: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 9: *Calcolare il valore dell' integrale.*

- Grafico del dominio di integrazione.



- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x\ \cos y) dy dx = \int_0^1 x \left[\sin y\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$
$$\int_0^1 x\ \sin x^2 dx = (1/2)(1-\cos(1)) = \sin^2(1/2).$$

*** fine testo ***