Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 14 settembre 2012.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 4}. \tag{1}$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti di singolarità e per* $x \to \pm\infty$.

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

La funzione è simmetrica rispetto all' asse y, quindi basterebbe studiarla ad esempio nel semipiano $x > 0$. Teniamo conto dell' informazione, ma consideriamo entrambi i semipiani.

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{2, -2\}$.
- Il segno del numeratore è sempre positivo, quindi il segno della funzione dipende da quello del denominatore. La funzione è positiva se $x < -2$ oppure $x > 2$.
- Punti di singolarità: $x = \pm 2$.

  $$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \mp\infty; \quad \lim_{x\to +2\pm} f(x) = \pm\infty$$

  Dividendo numeratore e denominatore per x, si ha

  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

- Derivata: sia $g(x) = f(x)|_{x>0}$, allora

  $$g'(x) = \frac{1}{x^2-4} - \frac{2x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2},$$

  allora

  $$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x > 0, \\ \text{indefinita}, & x = 0, \\ -g'(x), & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

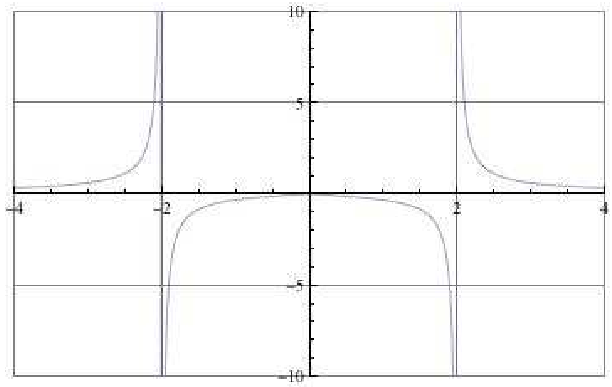
  negativa se $x > 0$, positiva altrimenti.

- La derivata seconda è:

  $$f''(x) = \mathrm{sign}(x)\frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}, \quad x \neq 0.$$

  Positiva se $x < -2$ oppure $x > 2$, intervallo nel quale la funzione è convessa.

- Grafico della funzione: nella figura è rappresentata la funzione $f(x)$. Notare che nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile: il grafico presenta un punto angoloso.


10
5
-5
-10
-4
-2
2
4

Test 2 Domanda numero 4: *Usando la definizione di derivata, dimostrare che se f e g sono derivabili in I, allora per ogni $x \in I$:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

Bisogna dimostrare che per ogni $x \in I$

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \quad (2)$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = \\
&g(x+h)(f(x+h) - f(x)) + f(x)(g(x+h) - g(x)).
\end{aligned}$$

Perciò, visto che f e g sono derivabili (e quindi continue) in I, risulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\
&f'(x)g(x) + g'(x)f(x).
\end{aligned}$$

QED

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + 2\,y' + 2\,y = \sin(x) + 2(1 + \cos(x)). \tag{3}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, e schizzarne un grafico.*

L'equazione differenziale (3) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = -1 \pm \iota$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = \exp(-x)(c_1\,\sin(x) + c_2\,\cos(x)) \tag{4}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A\cos x + B\sin x + C$ si ottiene risolvendo il sistema

$$A + 2B = 2, \quad -2A + B = 1, \quad 2C = 2,$$

ed è quindi

$$\bar{y} = \sin x + 1$$

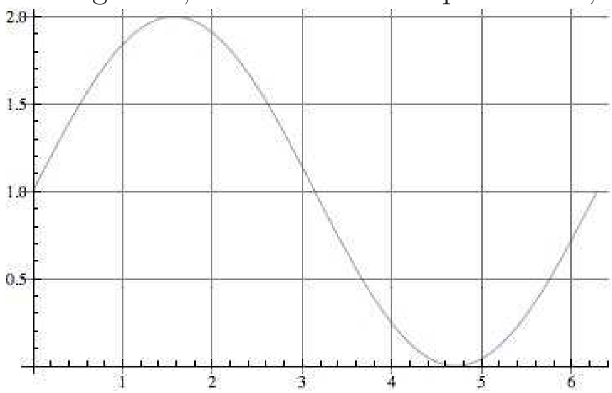
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = \exp(-x)(c_1\,\sin(x) + c_2\,\cos(x)) + \sin x + 1. \tag{5}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \sin x + 1.$$

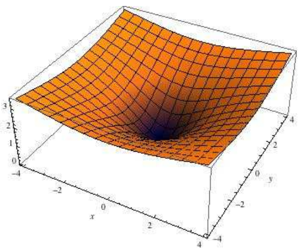
Il suo grafico, nell' intervallo di periodicità, e' schizzato sotto.



Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$$

Ecco uno schizzo del grafico.



Domanda numero 6: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 7: *Determinarne i punti di stazionarietà ed estremali nella regione $E = \{(x,y) : -4 \leq x, y \leq 4\}$.*

Domanda numero 8: *Schizzare le curve di livello $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$.*

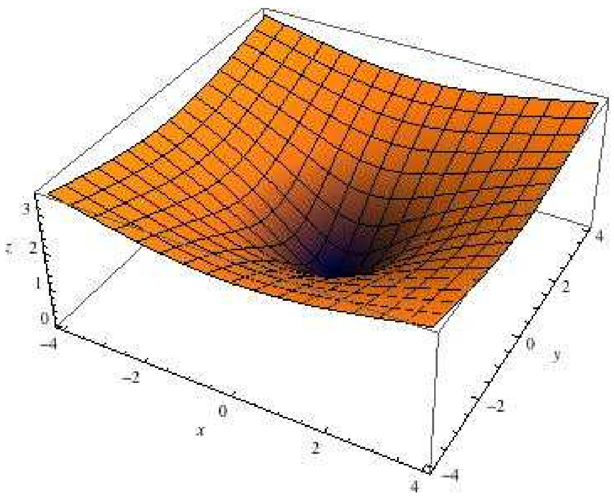
Abbiamo:

- Il dominio è:

$$D = \mathbb{R}^2.$$

  La funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.

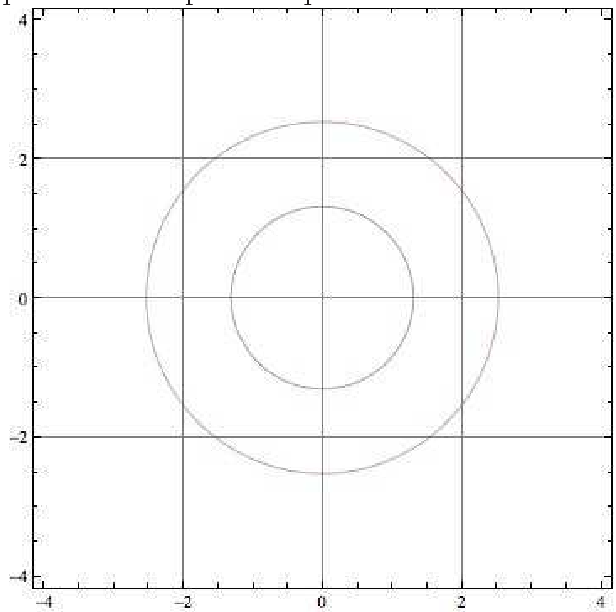
- Il grafico di $z = f(x,y)$ è riportato qui sotto.



- Gradiente:
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+1}, \frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+1}\right)$$
- Punti di stazionarietà:
$$P_s = (0,0)$$
- Matrice Hessiana:
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \frac{2(x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix}$$
$$M(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Quindi P_s è un punto di minimo, perché $H = \det(M(P_s)) = 4 > 0$, $M_{11} = 2 > 0$.
- Punti di minimo interni al dominio. $P_m = P_s$, $f(P_m) = 0$.
- Sulla frontiera, ad esempio sul segmento $4 \times [-4,4]$, la funzione è $f(4,y) = \log(17+y^2)$, che ha un minimo in $(4,0)$ e due massimi relativi in $(4,4)$ e $(4,-4)$.

  Vi sono quindi 4 punti di massimo sulla frontiera, sui bordi di E.
$$P_M^{(i,j)} = ((-1)^i 4, (-1)^j 4), \quad i,j = 1,2.$$
  In ognuno di questi punti la funzione vale $f(P_M) = \log(33) \simeq 3.5$.

- I valori estremali sono: $\min_{x\in E} f = 0$, $\max_{x\in E} f = \log(33)$.
- Le curve di livello $z = 1$, $z = 2$, sono rispettivamente quella piú interna e piú esterna riportate qui sotto.



Hanno raggi:

$$r_1 = \sqrt{e-1}, r_2 = \sqrt{e^2-1}.$$

Test 5 *Consideriamo*

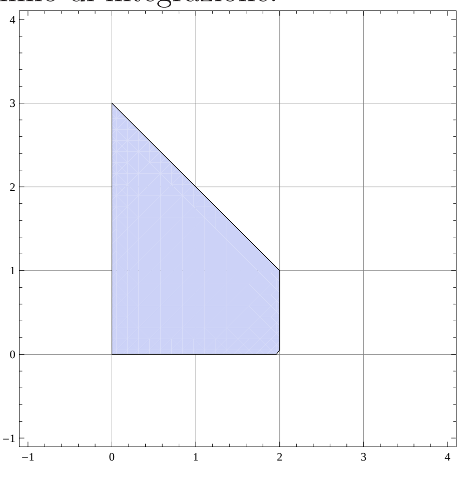
$$I = \int\int_D (y - 2x)dxdy, \tag{6}$$

essendo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 - x\}$.

Domanda numero 9: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 10: *Calcolare il valore dell' integrale.*

- Grafico del dominio di integrazione.



- Il valore dell' integrale è:

$$
\begin{gathered}
I = \int_0^2 \int_0^{3-x} (y - 2x) dy dx = \int_0^2 dx \left[\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_0^{3-x} = \\
\int_0^2 dx \left(\frac{(3-x)^2}{2} - 2x(3-x) \right) = \int_0^2 dx \frac{1}{2} \left(5x^2 - 18x + 9 \right) = \\
\frac{1}{2} \left[\frac{5}{3} x^3 - 9x^2 + 9x \right]_0^2 = -\frac{7}{3}.
\end{gathered}
$$

*** fine testo ***

Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 14 settembre 2012.

Tema B

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{-|x|}{x^2 - 9}. \tag{1}$$

Domanda numero 1*: Determinarne il dominio, i limiti nei punti di singolarità e per $x \to \pm\infty$.*

Domanda numero 2*: Studiare il segno della derivata prima della funzione.*

Domanda numero 3*: Studiare punti di stazionarietà, convessità ed estremi della funzione, schizzandone anche un grafico.*

La funzione è simmetrica rispetto all' asse y, quindi basterebbe studiarla ad esempio nel semipiano $x > 0$. Teniamo conto dell' informazione, ma consideriamo entrambi i semipiani.

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{3, -3\}$.
- Il segno del numeratore è sempre negativo, quindi il segno della funzione dipende da quello del denominatore. La funzione è positiva se $-3 < x < 3$.
- Punti di singolarità: $x = \pm 3$.

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x\to +3\pm} f(x) = \mp\infty$$

  Dividendo numeratore e denominatore per x, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

- Derivata: sia $g(x) = f(x)|_{x>0}$, allora

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2-9} + \frac{2x^2}{(x^2-9)^2} = +\frac{x^2+9}{(x^2-9)^2},$$

  allora

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x > 0, \\ \text{indefinita}, & x = 0, \\ -g'(x), & \textit{altrimenti}. \end{cases}$$

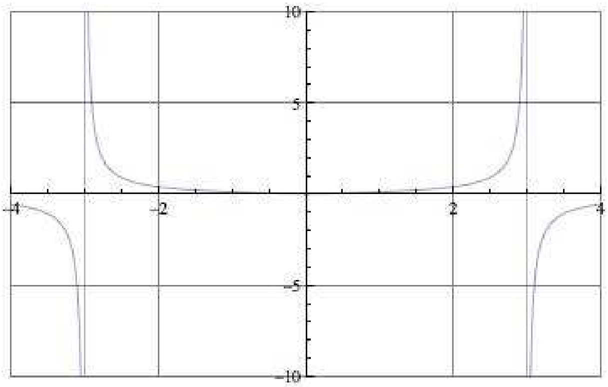
  negativa se $x < 0$, positiva altrimenti.

- La derivata seconda è:

$$f''(x) = -\mathrm{sign}(x)\frac{2x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}, \quad x \neq 0.$$

  Negativa se $x < -3$ oppure $x > 3$, intervallo nel quale la funzione è concava.

- Grafico della funzione: nella figura è rappresentata la funzione $f(x)$. Notare che nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile: il grafico presenta un punto angoloso.


10
5
-4
-2
2
4
-5
-10

Test 2 Domanda numero 4: *Usando la definizione di derivata, dimostrare che se p e q sono derivabili in I, allora per ogni $x \in I$:*

$$(p \cdot q)'(x) = p'(x)q(x) + q'(x)p(x).$$

Bisogna dimostrare che per ogni $x \in I$

$$(pq)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)q(x+h) - p(x)q(x)}{h} = p'(x)q(x) + q'(x)p(x). \tag{2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&p(x+h)q(x+h) - p(x)q(x) = \\
&p(x+h)q(x+h) - p(x)q(x+h) + p(x)q(x+h) - p(x)q(x) = \\
&q(x+h)(p(x+h) - p(x)) + p(x)(q(x+h) - q(x)).
\end{aligned}$$

Perciò, visto che p e q sono derivabili (e quindi continue) in I, risulta

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{p(x+h)q(x+h) - p(x)q(x)}{h} = \\
&\lim_{h\to 0} q(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} + p(x) \lim_{h\to 0} \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = \\
&p'(x)q(x) + q'(x)p(x).
\end{aligned}$$

QED

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' + 2\,y' - 3\,y = -3. \tag{3}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, e schizzarne un grafico.*

L'equazione differenziale (3) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = -3, 1$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y^* = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-3x). \tag{4}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = A$ si ottiene risolvendo l' equazione

$$-3A = -3,$$

ed è quindi

$$\bar{y} = 1$$

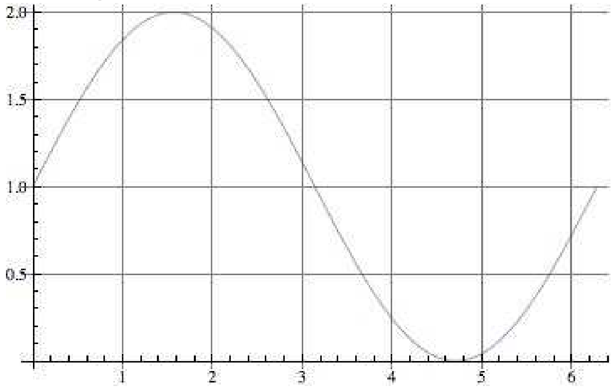
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-3x) + 1. \tag{5}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = \exp(x) + 1.$$

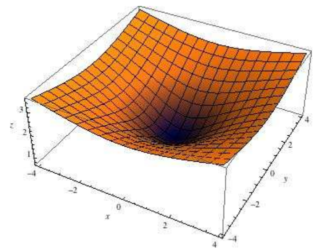
Il suo grafico e' schizzato sotto.



Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = \log(2 + x^2 + y^2)$$

Ecco uno schizzo del grafico.



Domanda numero 6: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 7: *Determinarne i punti di stazionarietà ed estremali nella regione $E = \{(x, y) : -4 \leq x, y \leq 4\}$.*

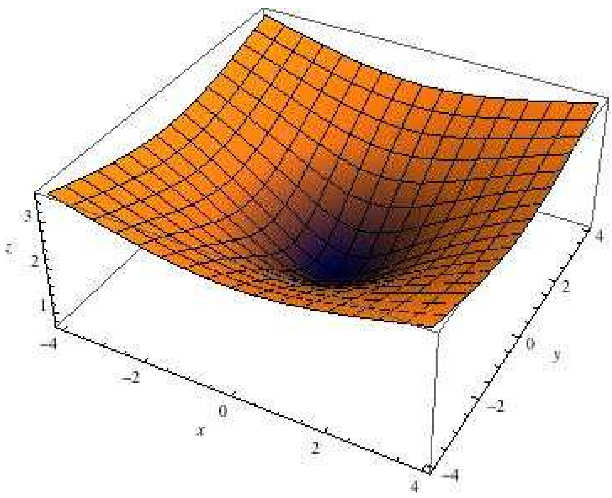
Domanda numero 8: *Schizzare le curve di livello $f(x, y) = 1$, $f(x, y) = 2$.*

- Il dominio è:

$$D = \mathbb{R}^2.$$

  La funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.

- Il grafico di $z = f(x, y)$ è riportato qui sotto.



- Gradiente:
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2}, \frac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+2}\right)$$

- Punti di stazionarietà:
$$P_s = (0,0)$$

- Matrice Hessiana:
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-2x^2+2y^2+4}{(x^2+y^2+2)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2+2)^2} \\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2+2)^2} & \frac{2(x^2-y^2+2)}{(x^2+y^2+2)^2} \end{pmatrix}$$

$$M(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Quindi P_s è un punto di minimo, perché $H = \det(M(P_s)) = 1 > 0$, $M_{11} = 1 > 0$.

- Punti di minimo interni al dominio. $P_m = P_s$, $f(P_m) = 0$.

- Sulla frontiera, ad esempio sul segmento $4 \times [-4,4]$, la funzione è $f(4,y) = \log(18+y^2)$, che ha un minimo in $(4,0)$ e due massimi relativi in $(4,4)$ e $(4,-4)$.

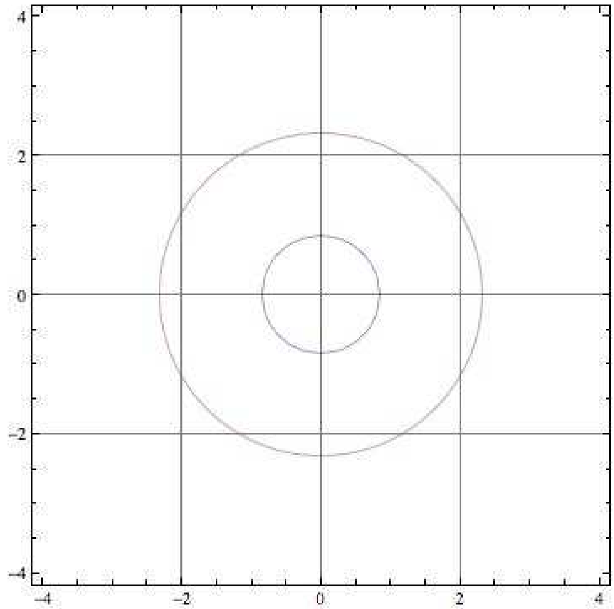
  Vi sono quindi 4 punti di massimo sulla frontiera, sui bordi di E.
$$P_M^{(i,j)} = ((-1)^i 4, (-1)^j 4), \quad i,j = 1,2.$$

  In ognuno di questi punti la funzione vale $f(P_M) = \log(34) \simeq 3.5$.

- I valori estremali sono: $\min_{x\in E} f = 0$, $\max_{x\in E} f = \log(34)$.
- Le curve di livello $z = 1$, $z = 2$, sono rispettivamente quella piú interna e piú esterna riportate qui sotto.

  Esse hanno raggi:

$$r_1 = \sqrt{e-2}, r_2 = \sqrt{e^2-2}.$$



Test 5 *Consideriamo*

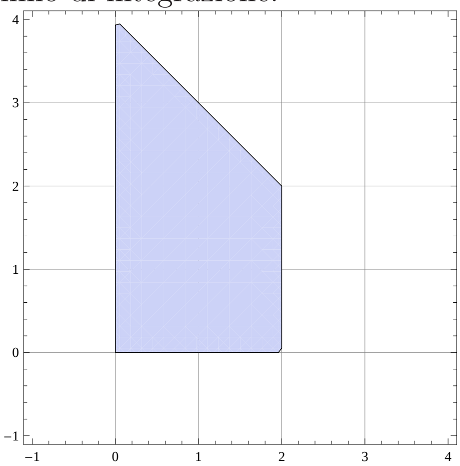
$$I = \int\int_D (x - 2y) dx dy, \tag{6}$$

essendo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x\}$.

Domanda numero 9: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 10: *Calcolare il valore dell' integrale.*

- Grafico del dominio di integrazione.



- Il valore dell' integrale è:

$$
\begin{gathered}
I = \int_0^2 \int_0^{4-x} (x-2y)dydx = \int_0^2 dx \left[xy - y^2\right]_0^{4-x} = \\
\int_0^2 dx \left(x(4-x) - (4-x)^2\right) = \\
\left[(-2/3)x^3 + 6x^2 - 16x\right]_0^2 = -\frac{40}{3}.
\end{gathered}
$$

*** fine testo ***