Università di Venezia *Ca' Foscari*

Corso di Laurea in Informatica

Insegnamento integrato di Calcolo
Prof. F. Sartoretto

Verifica scritta del 18 maggio 2012.

Tema A

CORREZIONE

Nome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Cognome ☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐☐
Matricola ☐☐☐☐☐☐☐☐ Aula ☐ Posto ☐☐☐☐
Calcolo 12 crediti ☐
Analisi Matematica 9 crediti ☐
Superato test OFA ☐

Tempo: due ore. Consegnare solo questi fogli. Risposte errate comportano un punteggio negativo. Giustificare le risposte, sintetizzando i passaggi. RICORDARSI di mettere nome, cognome e numero di matricola su TUTTI i fogli.

Valore dei test: Test 1 = 8, Test 2 = 4, Test 3 = 5, Test 4 = 8, Test 5 = 5.

Test 1 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2}{x-1}\right). \tag{1}$$

Domanda numero 1: *Determinarne il dominio.*

Domanda numero 2: *Studiare il comportamento della funzione in un intorno a piacere di $x = 1$.*

Domanda numero 3: *Studiare la convessità della funzione, schizzando anche un grafico.*

- $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
- La funzione è continua e derivabile a piacere nel suo dominio.

  Abbiamo:

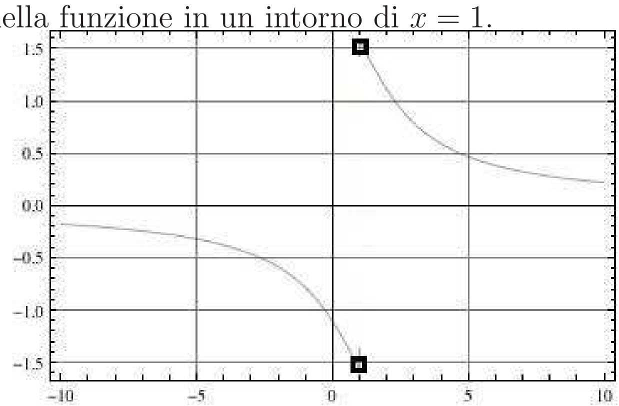
  $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\pi/2; \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \pi/2.$$

- Derivata prima:

$$f'(x) = -2/(x^2 - 2x + 5)$$

- $x^2 - 2x + 5 > 0$ per ogni x reale, quindi $f'(x) \leq 0$ per ogni x reale.
- $f'(x) \neq 0$ per ogni x. Non ci sono punti di stazionarietà.
- Grafico della funzione in un intorno di $x = 1$.



- Derivata seconda: $4(x-1)/(x^2-2x+5)^2$. È positiva se $x > 1$, quindi $f(x)$ è convessa per tali valori di x.

Test 2 Domanda numero 4: *Usando solo la definizione di derivata, dimostrare che se $y = x^2 - 1$, allora $y' = 2x$.*

Risoluzione.
Dato che
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$
otteniamo
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - 1) - (x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Test 3 *Si vuole risolvere l'equazione differenziale*

$$y'' - 4\,y' + 3y = x; \tag{2}$$

Domanda numero 5: *Determinare la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, *e schizzarne un grafico.*

L'equazione differenziale (2) è lineare, del secondo ordine, a coefficienti costanti.
L' equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

le cui soluzioni sono $\lambda = 1, 3$.
Quindi la soluzione generale dell' omogenea associata è:

$$y = c_1\,\exp(x) + c_2\,\exp(3x) \tag{3}$$

Una soluzione particolare dell' equazione completa, nella forma $y = Ax + B$ si ottiene risolvendo il sistema

$$3A - 1 = 0, \quad 3B - 4A = 0,$$

ed è quindi

$$y = x/3 + 4/9.$$

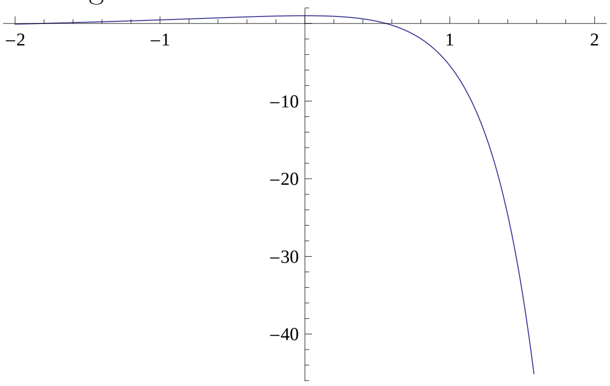
La soluzione generale dell' equazione completa è:

$$y = c_1\,\exp(x) + c_2\,\exp(3x) + x/3 + 4/9 \tag{4}$$

La soluzione particolare che soddisfa le condizioni iniziali è:

$$y = e^x - (4/9)e^{3x} + x/3 + 4/9.$$

Il suo grafico e' schizzato sotto.



Test 4 *Consideriamo la funzione*

$$f(x, y) = 4x^2 + 2xy - 4y^2 - 12x + 14y - 8.$$

Domanda numero 6: *Determinarne punti di stazionarietà ed estremali.*

Domanda numero 7: *Calcolare il polinomio di Taylor lineare attorno al punto $P = (1, 2)$.*

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$.
La funzione è differenziabile quante volte si vuole.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 2y - 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -8y + 2x + 14$$

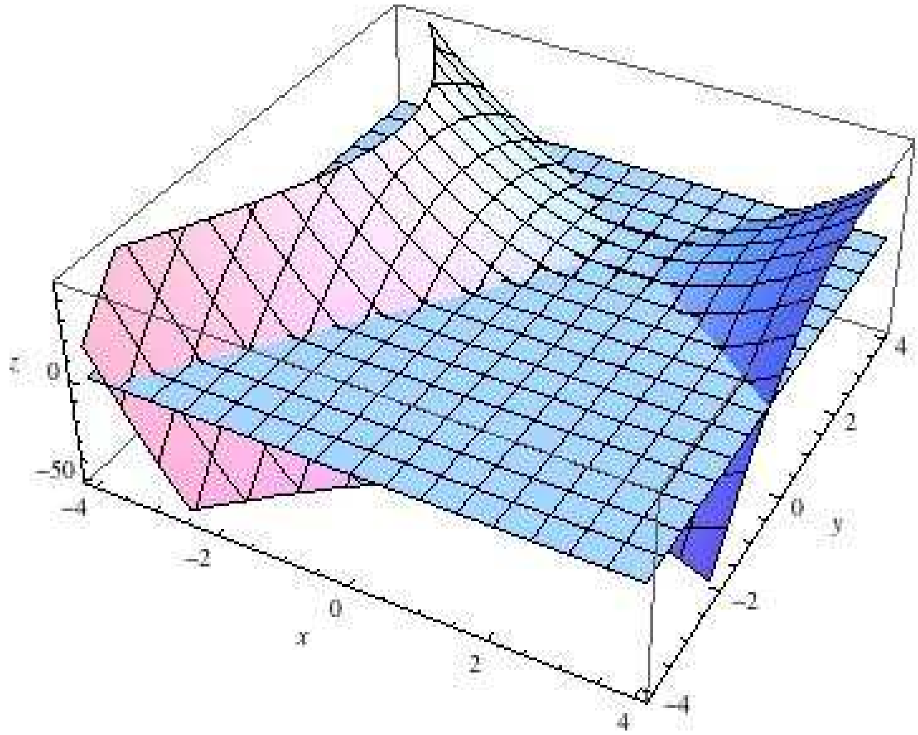
Vi è un unico punto di stazionarietà $\mathbf{x} = (1, 2)^T$, dove $f(1, 2) = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è costante.
Il determinante della matrice Hessiana è negativo, quindi si tratta di un punto di sella.
Dato che il punto in cui si effettua lo sviluppo di Taylor lineare è di stazionarietà, abbiamo

$$t_1(x, y) = 0.$$

Grafico della funzione e del polinomio di Taylor (non richiesto nel compito)


z
0
−50
−4
−2
0
x
2
4
−4
−2
0
y
2
4

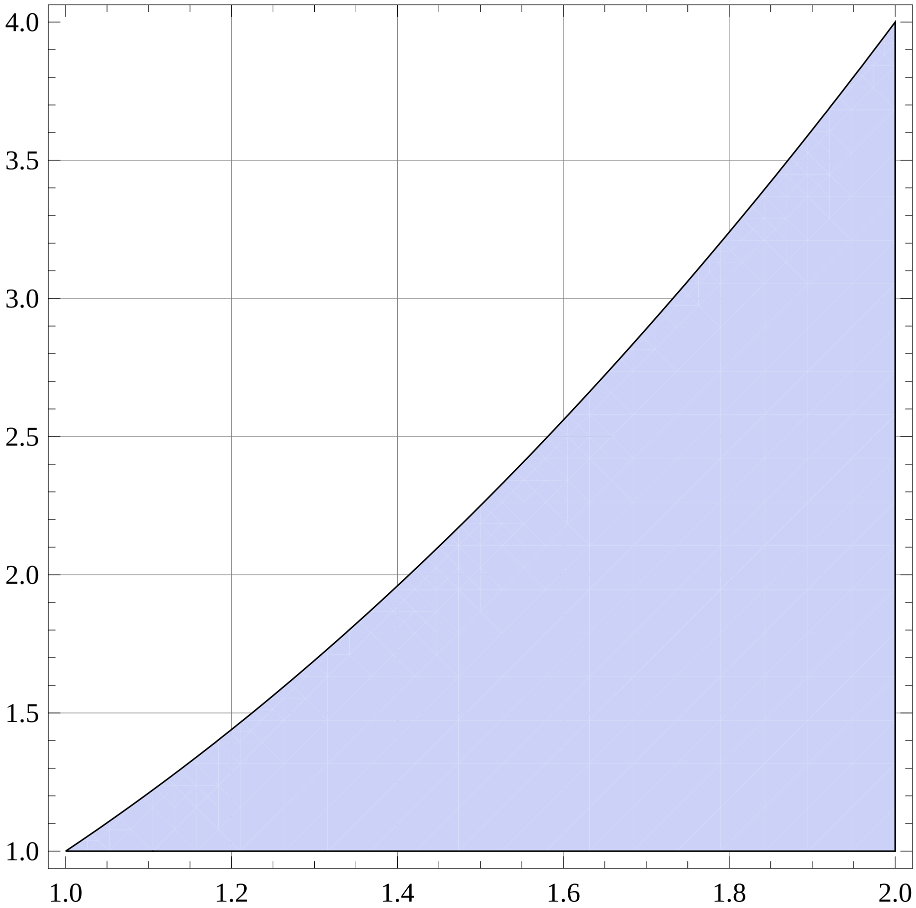
Test 5 *Consideriamo*

$$I = \int\int_D (x\,\sin y)dxdy, \tag{5}$$

essendo $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$.
Domanda numero 8: *Schizzare un grafico del dominio di integrazione.*

Domanda numero 9: *Calcolare il valore dell' integrale.*

- Grafico del dominio di integrazione.



- Il valore dell' integrale è:

$$I = \int_1^2 \int_1^{x^2} (x \sin y) dy dx = \int_1^2 x \left[-\cos y\right]_{y=1}^{y=x^2} dx =$$

$$\int_1^2 x \left(\cos(1) - \cos(x^2)\right) dx = \frac{1}{2}(\sin(1) - \sin(4) + 3\cos(1))$$

*** fine testo ***