EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi svolti

1. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $(x^2+1)y'+y^2=0$.

2. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'+x\,\tan y=0 \\ y(0)=\frac{1}{2}\pi. \end{cases}$

3. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=\frac{xy}{(x-1)^2} \\ y(2)=1. \end{cases}$

4. Determinare a per cui $y(x)=xe^{ax}$ è una soluzione di $xy''-xy'-y=0$.

5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $(\sin x)y'+(\cos x)y=e^x$.

6. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'-y=1 \\ y(0)=0. \end{cases}$

7. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'=y\,\sin x+\sin 2x \\ y(0)=-2. \end{cases}$

8. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\,y+1$. Determinare poi le soluzioni $y(x)$ che soddisfano $\lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty$.

9. Determinare la soluzione di $\begin{cases} y''-2y'-8y=0 \\ y(1)=1,\ y'(1)=0 \end{cases}$ e il suo valore in $x=0$.

10. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''-4y'+13y=x\,e^x$.

11. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''+y'+\frac{1}{4}y=\cos x$.

12. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''-8y'+15y=2\,e^{3x} \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0. \end{cases}$

13. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''-y=x\,e^x \\ y(0)=0=y'(0). \end{cases}$

14. Determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y''-4y'+5y=e^{2x}(1+\cos x)+5x^2.$$

15. Verificare che $\sin 2x$ è una soluzione di $y'''' + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 0$, e trovare la soluzione generale.

16. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0. \end{cases}$

17. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0. \end{cases}$

18. Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' = \frac{e^x}{\cosh x} \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0. \end{cases}$

19. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

in termini di funzioni elementari. (Suggerimento: usando il teorema di derivazione per serie si dimostri che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Riscriviamo l'equazione differenziale nella forma
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{1+x^2},$$
che è a variabili separabili. La soluzione costante è $y(x) = 0\ \forall x$. Se y non è identicamente nullo, abbiamo
$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \arctan x + c,$$
da cui
$$y(x) = \frac{1}{\arctan x + c},$$
dove $c \in \mathbb{R}$. (La soluzione costante $y(x)=0$ corrisponde a $c = \pm\infty$).

2. La soluzione costante $y = 0$ non soddisfa la condizione iniziale. Separando le variabili otteniamo
$$\frac{dy}{\tan y} = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\int x\,dx$$
$$\Rightarrow \quad \ln|\sin y| = -\tfrac{1}{2}x^2 + a \quad \Rightarrow \quad |\sin y| = e^a\,e^{-x^2/2}$$
$$\Rightarrow \quad \sin y = \pm e^a\,e^{-x^2/2} = c\,e^{-x^2/2}$$
dove $a \in \mathbb{R}$ e $c = \pm e^a$ è una costante non nulla. Ponendo la condizione iniziale si ottiene $c = 1$. Esplicitando la y abbiamo infine la soluzione del problema di Cauchy:
$$y(x) = \arcsin(e^{-x^2/2}).$$

3. La nostra equazione differenziale può essere considerata sia a variabili separabili che lineare. Nel primo caso procedendo con la separazione delle variabili otteniamo
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx.$$
Il secondo integrale si risolve ponendo $x - 1 = t$:
$$\log|y| = \int \frac{t+1}{t^2}\,dt = \log|t| - \frac{1}{t} + c = \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$
Esplicitando la y otteniamo
$$|y| = e^c\,e^{-1/(x-1)}|x-1| \quad \Rightarrow \quad y(x) = k(x-1)\,e^{-\frac{1}{x-1}},$$
dove $k = \pm e^c$ è una costante non nulla. (Abbiamo usato il fatto che $|a| = |b| \ \Leftrightarrow \ a = \pm b$.) Imponendo la condizione iniziale si ottiene $ke^{-1} = 1$, da cui $k = e$, e infine
$$y(x) = (x-1)\,e^{1-\frac{1}{x-1}} = (x-1)e^{\frac{x-2}{x-1}}.$$

4. Si ha $y'(x) = (1+ax)\,e^{ax}$, $y''(x) = (2a + a^2x)\,e^{ax}$. Sostituendo nell'equazione si ottiene
$$x[e^{ax}(a^2x + 2a)] - x[e^{ax}(ax+1)] - [x\,e^{ax}] = 0 \ \Rightarrow \ (a^2 - a)x^2 + (2a-2)x = 0.$$
I coefficienti di x e x^2 devono annullarsi entrambi, quindi $a = 1$.

5. Dividendo per $\sin x$ (supponendo $\sin x \neq 0$) otteniamo

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x} y + \frac{e^x}{\sin x},$$

che è un'equazione differenziale lineare, cioè della forma $y' = a(x)y + b(x)$. Ricordiamo la formula risolutiva di tali equazioni

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx,$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$. Nel nostro caso si ha

$$a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \qquad \Longrightarrow \qquad A(x) = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = -\log|\sin x|,$$

e quindi

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log|\sin x|} \int e^{\log|\sin x|} \frac{e^x}{\sin x}\, dx \\ &= \frac{1}{|\sin x|} \int |\sin x| \frac{e^x}{\sin x}\, dx \\ &= \frac{1}{\sin x} \int e^x\, dx = \frac{e^x + c}{\sin x} \qquad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Come dominio della soluzione si può prendere qualsiasi intervallo in cui $\sin x \neq 0$.

6. L'equazione $y' = y+1$ può essere considerata sia a variabili separabili che lineare. Nel secondo caso possiamo applicare la formula risolutiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

cioè

$$y(x) = e^{A(x)} \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt \Big),$$

dove $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$ è la primitiva di $a(x)$ che si annulla in $x = x_0$. Nel nostro caso abbiamo $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a(x) = 1 \Rightarrow A(x) = \int_0^x 1\, dt = x$, $b(x) = 1$, e otteniamo

$$y(x) = e^x \Big(0 + \big[-e^{-t} \big]_0^x \Big) = e^x(1 - e^{-x}) = e^x - 1.$$

Possiamo anche calcolare prima la soluzione generale dell'equazione lineare $y' = y + 1$ con la formula risolutiva vista nell'esercizio precedente, ottenendo $y(x) = e^x \int e^{-x} dx = k\, e^x - 1$, e poi imporre la condizione iniziale $y(0) = 0$, da cui $k = 1$.

Considerando invece l'equazione come a variabili separabili, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int \frac{dy}{y+1} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \log|y+1| = x + c \\ &\Rightarrow \quad |y+1| = e^c\, e^x \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \pm e^c\, e^x = k\, e^x \end{aligned}$$

dove $k = \pm e^c$ è una costante diversa da zero. Imponendo $y(0) = 0$ otteniamo $k = 1$ e infine $y(x) = e^x - 1$, come sopra.

7. Applicando la formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari con $A(x) = \int \sin x\,dx = -\cos x$, otteniamo la soluzione generale

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\cos x} \int e^{\cos x} \sin(2x)\,dx \\
&= 2e^{-\cos x} \int e^{\cos x} \sin x \cos x\,dx \\
&\quad (\cos x = t \ \Rightarrow\ -\sin x dx = dt) \\
&= -2e^{-\cos x} \int t\,e^t\,dt \\
&= -2e^{-\cos x} \left(te^t - e^t + c\right) \\
&= -2e^{-\cos x} \left(\cos x e^{\cos x} - e^{\cos x} + c\right) \\
&= -2\cos x + 2 - 2ce^{-\cos x}.
\end{aligned}$$

Imponendo $y(0) = -2$ si ottiene $c = e$, e infine

$$y(x) = 2 - 2\cos x - 2e^{1-\cos x}.$$

8. Si tratta di un'equazione differenziale lineare con $a(x) = 1/\sqrt{x} \ \Rightarrow\ A(x) = 2\sqrt{x}$. Applicando la formula risolutiva abbiamo

$$\begin{aligned}
y(x) &= e^{2\sqrt{x}} \int e^{-2\sqrt{x}}\,dx \\
&\quad (2\sqrt{x} = t \ \Rightarrow\ x = \tfrac{1}{4}t^2,\ dx = \tfrac{1}{2}t\,dt) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} \int t\,e^{-t}\,dt \\
&= \tfrac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} \left(-te^{-t} - e^{-t} + c\right) \\
&= \tfrac{1}{2}e^{2\sqrt{x}} \left(-2\sqrt{x}e^{-2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}} + c\right) \\
&= -\sqrt{x} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c\,e^{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Calcolando il limite di $y(x)$ per $x \to +\infty$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c \le 0. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni con $c \le 0$ soddisfano dunque $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$.

9. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$ e le radici sono $4, -2$. La soluzione generale dell'equazione è perciò $c_1e^{4x} + c_2e^{-2x}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), e le condizioni iniziali danno

$$\begin{cases} c_1e^4 + c_2e^{-2} = 1 \\ 4c_1e^4 - 2c_2e^{-2} = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{3}e^{-4} \\ c_2 = \frac{2}{3}e^2. \end{cases}$$

Quindi $y(x) = \frac{1}{3}e^{4x-4} + \frac{2}{3}e^{2-2x}$, e $y(0) = \frac{1}{3}(e^{-4} + 2e^2)$.

10. Risolviamo prima l'equazione omogenea $y'' - 4y' + 13y = 0$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$ e l'equazione caratteristica $p(\lambda) = 0$ ha le soluzioni (complesse coniugate) $\lambda = 2 \pm 3i$. L'integrale generale dell'omogenea è dunque

$$y_{om}(x) = c_1\,e^{2x}\cos(3x) + c_2\,e^{2x}\sin(3x).$$

A questo bisogna aggiungere una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione non omogenea, con termine forzante $x\,e^x$. Poichè x è un polinomio di primo grado e poichè e^x non è soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare con il metodo di somiglianza nella forma $y_p(x) = (Ax + B)e^x$. Si ha

$$y_p'(x) = (Ax + B + A)e^x, \quad y_p''(x) = (Ax + 2A + B)e^x.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$e^x \{Ax + 2A + B - 4Ax - 4B - 4A + 13Ax + 13B\} = x\,e^x,$$

cioè $10Ax - 2A + 10B = x$, da cui

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ -2A + 10B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1/10 \\ B = 1/50. \end{cases}$$

Una soluzione particolare della non omogenea è dunque $y_p(x) = \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{50}\right)e^x$, e l'integrale generale è

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x) = c_1\,e^{2x}\cos(3x) + c_2\,e^{2x}\sin(3x) + \left(\tfrac{1}{10}x + \tfrac{1}{50}\right)e^x.$$

11. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = (\lambda + \frac{1}{2})^2$ ha la radice doppia $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_{om}(x) = c_1\,e^{-x/2} + c_2\,x\,e^{-x/2}.$$

Con il metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Si ha $y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x$, $y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$\left[-A + B + \tfrac{1}{4}A\right]\cos x + \left[-B - A + \tfrac{1}{4}B\right]\sin x = \cos x.$$

Questa relazione deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}$. Otteniamo così il sistema

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}A + B = 1 \\ -A - \frac{3}{4}B = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -\frac{12}{25}$, $B = \frac{16}{25}$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1\,e^{-x/2} + c_2\,x\,e^{-x/2} - \tfrac{12}{25}\cos x + \tfrac{16}{25}\sin x.$$

12. Determiniamo innanzitutto l'integrale generale. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda-3)(\lambda-5)$ ha le due radici reali e distinte $\lambda = 3, 5$; la soluzione generale dell'omogenea è $c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{5x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante $2\,e^{3x}$. Poichè e^{3x} è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = A\,x\,e^{3x}$. Si ha

$$y_p'(x) = A(3x + 1)e^{3x}, \quad y_p''(x) = A(9x + 6)e^{3x}.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$A\,[9x + 6 - 8(3x + 1) + 15x]\,e^{3x} = 2\,e^{3x},$$

da cui $A = -1$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{5x} - x\,e^{3x}.$$

Calcolando $y'(x)$ e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0 = y'(0)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = -1/2 \\ c_2 = 1/2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{3x} + \tfrac{1}{2}e^{5x} - x\,e^{3x}.$$

13. Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 1$ e quindi l'equazione omogenea ha soluzione generale $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante $x\,e^x$. Poichè x un polinomio di primo grado e poichè e^x è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = (ax+b)x\,e^x$. Si ha

$$y_p'(x) = [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x, \qquad y_p''(x) = [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b]e^x.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx]e^x = x\,e^x,$$

da cui $4ax + 2a + 2b = x$, e quindi

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4. \end{cases}$$

La soluzione particolare è $\frac{1}{4}x^2 e^x - \frac{1}{4}xe^x$, e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{1}{4}x^2 e^x - \tfrac{1}{4}x\,e^x.$$

Le condizioni iniziali danno origine al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1/8 \\ c_2 = -1/8. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = \tfrac{1}{8}\left[e^x - e^{-x} + 2x^2 e^x - 2x\,e^x\right].$$

14. Risolviamo prima l'equazione omogenea $L\,y = 0$ dove $L\,y = y'' - 4y' + 5y$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ ha radici complesse coniugate, $\lambda = (4 \pm \sqrt{-4})/2 = 2 \pm i$, e quindi la soluzione generale dell'omogenea è $e^{2x}(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$. Per determinare una soluzione particolare della non omogenea si applica il principio di sovrapposizione: poichè il termine forzante è la somma dei tre termini e^{2x}, $e^{2x}\cos x$, $5x^2$, bisogna trovare soluzioni particolari per le equazioni $L\,y = e^{2x}$, $L\,y = e^{2x}\cos x$ e $L\,y = 5x^2$ e poi sommarle.

Per l'equazione $L\,y = e^{2x}$ si cerca una soluzione nella forma $y(x) = a\,e^{2x}$, non essendo e^{2x} soluzione dell'omogenea. Sostituendo nell'equazione $L\,y = e^{2x}$ si ottiene facilmente la condizione $a = 1$, e quindi la soluzione particolare e^{2x}.

Siccome $e^{2x}\cos x$ è soluzione dell'omogenea $L\,y = 0$, si cerca una soluzione particolare dell'equazione $L\,y = e^{2x}\cos x$ nella forma $y(x) = x\,e^{2x}(a\,\cos x + b\,\sin x)$. Sostituendo nell'equazione $L\,y = e^{2x}\cos x$ si ottiene $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, da cui la soluzione particolare $\frac{1}{2}x\,\sin x\,e^{2x}$. Invece di riportare i calcoli (che sono abbastanza lunghi), facciamo vedere come si può giungere alla soluzione più velocemente usando il formalismo complesso.

Supponiamo di dover risolvere l'equazione

$$Ly = P(x)\,e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad \text{oppure} \qquad Ly = P(x)\,e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{1}$$

dove P è un polinomio di grado n e L è l'operatore differenziale $L = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + a_1\frac{d}{dx} + a_2$.

Osserviamo che in generale se $Ly_1 = f_1(x)$ e $Ly_2 = f_2(x)$, allora la funzione (a valori complessi) $y = y_1 + iy_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soddisfa $Ly = f(x)$ con $f = f_1 + if_2$. Questo segue subito dalla linearità dell'operatore L. Viceversa se $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ soddisfa $Ly = f(x)$ con il termine forzante complesso $f = f_1 + if_2$, allora la parte reale $y_1 = \operatorname{Re} y$ soddisfa $Ly_1 = f_1(x)$ e la parte immaginaria $y_2 = \operatorname{Im} y$ soddisfa $Ly_2 = f_2(x)$.

Invece di risolvere le equazioni (1), possiamo allora risolvere l'equazione complessa

$$Ly = P(x)\, e^{(\alpha+i\beta)x} \tag{2}$$

e poi prendere la parte reale o immaginaria della soluzione trovata. (Si ricordi la formula di Eulero $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$.) Il metodo di somiglianza complesso dice che la (2) ha una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = Q(x)\, x^m\, e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad \text{dove} \quad m = \begin{cases} 0 \ \text{ se } \ p(\alpha+i\beta) \neq 0, \\ \text{molteplicità di } \ \alpha+i\beta \ \text{ se } \ p(\alpha+i\beta) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ è il polinomio caratteristico, e $Q(x)$ è un polinomio *a coefficienti complessi* di grado n, cioè $Q(x) = Q_1(x) + iQ_2(x)$ con Q_1, Q_2 polinomi reali di grado n.

Una volta determinata y_p (sostituendo la (3) nella (2)) separiamo la parte reale e immaginaria

$$\begin{aligned} y_p(x) &= e^{\alpha x}\, x^m\, [Q_1(x) + iQ_2(x)]\,(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}\, x^m\, \{Q_1(x)\cos\beta x - Q_2(x)\sin\beta x + i\,[Q_2(x)\cos\beta x + Q_1(x)\sin\beta x]\}\,, \end{aligned}$$

e vediamo che

$$y_p^{(1)}(x) = \operatorname{Re} y_p(x) = e^{\alpha x}\, x^m\, [Q_1(x)\cos\beta x - Q_2(x)\sin\beta x] \quad \text{risolve} \quad Ly = P(x)\, e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

mentre

$$y_p^{(2)}(x) = \operatorname{Im} y_p(x) = e^{\alpha x}\, x^m\, [Q_2(x)\cos\beta x + Q_1(x)\sin\beta x] \quad \text{risolve} \quad Ly = P(x)\, e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Tornando al nostro caso concreto, invece di risolvere $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$ risolviamo l'equazione complessa

$$y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x}. \tag{4}$$

Poichè $2+i$ è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità 1, cerchiamo una soluzione particolare della (4) nella forma

$$y_p(x) = A\, x\, e^{(2+i)x}$$

dove $A \in \mathbb{C}$ è una costante complessa (polinomio complesso di grado zero) da determinare. Si ha

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\, e^{(2+i)x} + A\, x(2+i)e^{(2+i)x}, \\ y_p''(x) &= 2A(2+i)e^{(2+i)x} + A\, x(2+i)^2 e^{(2+i)x}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4) otteniamo l'equazione

$$e^{(2+i)x}\left\{A\, x\left[(2+i)^2 - 4(2+i) + 5\right] + 2A(2+i) - 4A\right\} = e^{(2+i)x}.$$

Il termine in parentesi quadra si annulla essendo uguale a $p(2+i) = 0$. Otteniamo $2Ai = 1$, da cui $A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, e

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\tfrac{i}{2}\, x\, e^{(2+i)x} = -\tfrac{i}{2}\, x\, e^{2x}(\cos x + i\sin x) \\ &= x\, e^{2x}(\tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{i}{2}\cos x). \end{aligned}$$

Poichè $e^{2x}\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{(2+i)x}\right)$, la soluzione particolare cercata è precisamente

$$\operatorname{Re} y_p(x) = \tfrac{1}{2} x\, e^{2x}\, \sin x.$$

Dalla discussione precedente segue inoltre che la funzione $\operatorname{Im} y_p(x) = -\frac{1}{2}x\, e^{2x}\, \cos x$ risolve $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin x$.

Infine per l'equazione $L\,y = 5x^2$, si cerca una soluzione nella forma $y(x) = a + bx + cx^2$. Sostituendo nell'equazione $L\,y = 5x^2$ si ottiene facilmente la soluzione particolare

$$y(x) = \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5}x + x^2.$$

Una soluzione particolare dell'equazione originale è quindi:

$$y(x) = e^{2x} + \tfrac{1}{2}x\, \sin x\, e^{2x} + \tfrac{22}{25} + \tfrac{8}{5}x + x^2.$$

15. Invece di fare una verifica diretta, calcoliamo il polinomio caratteristico,

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 16\lambda + 16,$$

e ricordiamo che $\sin 2x$ è una soluzione se e solo se $2i$ e $-2i$ sono radici di $p(\lambda)$. In effetti si ha $p(2i) = 2^4 - 4i\, 2^3 - 8\, 2^2 + 16i\, 2 + 16 = 0$, e $p(-2i)$ è anch'esso zero. (Non c'è bisogno di verificarlo: poichè $p(\lambda)$ ha coefficienti reali, se λ_0 è una radice, anche il complesso coniugato $\overline{\lambda_0}$ è una radice.) Quindi $\sin 2x$ è una soluzione, e un'altra soluzione indipendente è $\cos 2x$. Per determinare altre 2 soluzioni indipendenti, dobbiamo trovare tutte le radici di $p(\lambda)$. Sappiamo che $p(\lambda)$ è divisibile per $(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = \lambda^2 + 4$. Dividendo $p(\lambda)$ per $\lambda^2 + 4$ otteniamo

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 2)^2.$$

Dunque $\lambda = -2$ è una radice doppia di $p(\lambda)$. La soluzione generale è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x\, e^{-2x} + c_3 \sin 2x + c_4 \cos 2x.$$

16. In questo caso il metodo di somiglianza non funziona. Applichiamo allora la formula generale

$$y(x) = \int_0^x g(x-t) f(t)\, dt \tag{5}$$

che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \end{cases}$$

dove g è la *risposta impulsiva*, cioè la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Ricordiamo che la risposta impulsiva $g(x)$ è data come segue.

- Se $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$ e λ_1, λ_2 sono le due radici distinte (reali o complesse coniugate) del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, si ha

  $$g(x) = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x} \right).$$

  Se $\Delta < 0$ allora $\lambda_{1,2} = (-a \pm i\sqrt{-\Delta})/2$, $\lambda_1 - \lambda_2 = i\sqrt{-\Delta}$, e possiamo riscrivere $g(x)$ come

  $$g(x) = \tfrac{1}{i\sqrt{-\Delta}} \left(e^{(-\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})x} - e^{(-\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})x} \right) = \tfrac{1}{\omega}\, e^{-\frac{a}{2}x} \sin(\omega x), \qquad \text{dove} \quad \omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta}.$$

  Analogamente se $\Delta > 0$ si ha $\lambda_{1,2} = (-a \pm \sqrt{\Delta})/2$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{\Delta}$, e possiamo anche scrivere $g(x)$ come

  $$g(x) = \tfrac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(e^{(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2})x} - e^{(-\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2})x} \right) = \tfrac{1}{\omega}\, e^{-\frac{a}{2}x}\, \mathrm{sh}\,(\omega x), \qquad \text{dove} \quad \omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

- Se $\Delta = 0$ e λ_1 è l'unica radice di $p(\lambda)$ (con molteplicità 2), si ha

  $$g(x) = x\, e^{\lambda_1 x} = x\, e^{-\frac{a}{2}x}.$$

Nel nostro caso il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, dunque $\Delta = 0$, ed essendo $a = -2$, la risposta impulsiva è

$$g(x) = x\, e^x.$$

Il termine forzante $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ è continuo per $x > -2$ e per $x < -2$. Poichè le condizioni iniziali sono poste nel punto $x_0 = 0$, possiamo lavorare nell'intervallo $x > -2$, ottenendo

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^x (x-t)\, e^{x-t}\, \frac{e^t}{t+2}\, dt \\
&= -e^x \int_0^x \frac{t-x}{t+2}\, dt = -e^x \int_0^x \frac{t+2-2-x}{t+2}\, dt \\
&= -e^x \int_0^x \left(1 - \frac{x+2}{t+2}\right) dt \\
&= -x\, e^x + (x+2)e^x \left[\log|t+2|\right]_0^x \\
&= -x\, e^x + (x+2)e^x \log\left(\frac{x+2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Notiamo che essendo $y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 x\, e^x$ la soluzione generale dell'omogenea, possiamo scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2}$ sull'intervallo $(-2, +\infty)$ nella forma

$$y_{gen}(x) = c_1 e^x + c_2 x\, e^x + (x+2)e^x \log(x+2).$$

Infatti il termine $-x\, e^x - (x+2)e^x \log 2$ nella soluzione particolare trovata sopra può essere inglobato in $y_{om}(x)$.

17. Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, dunque $\Delta = -4 < 0$, $\omega = \sqrt{-\Delta}/2 = 1$, ed essendo $a = 0$ otteniamo la risposta impulsiva
$$g(x) = \tfrac{1}{\omega}\, e^{-ax/2} \sin(\omega x) = \sin x.$$
I dati iniziali sono posti nel punto $x_0 = 0$ e possiamo lavorare nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, dove il termine forzante $f(x) = 1/\cos x$ è continuo. Applicando la formula (5) otteniamo

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^x \sin(x-t)\, \frac{1}{\cos t}\, dt \\
&= \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t)\, \frac{1}{\cos t}\, dt \\
&= \sin x \int_0^x dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\, dt \\
&= x \sin x + \cos x \left[\log|\cos t|\right]_0^x \\
&= x \sin x + \cos x\, \log(\cos x).
\end{aligned}$$

18. Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$ quindi $\Delta = 4 > 0$, $\omega = \sqrt{\Delta}/2 = 1$, ed essendo $a = -2$ otteniamo la risposta impulsiva

$$g(x) = \tfrac{1}{\omega}\, e^{-ax/2}\, \mathrm{sh}(\omega x) = e^x\, \mathrm{sh}\, x.$$

Il termine forzante $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x}$ è continuo su tutto $\mathbb{R}$, e dalla (5) otteniamo

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^x e^{x-t}\operatorname{sh}(x-t)\,\frac{e^t}{\operatorname{ch} t}\,dt \\
&= e^x \int_0^x (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t)\,\frac{1}{\operatorname{ch} t}\,dt \\
&= e^x \operatorname{sh} x \int_0^x dt - e^x \operatorname{ch} x \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\,dt \\
&= x\,e^x \operatorname{sh} x - e^x \operatorname{ch} x\,[\log(\operatorname{ch} t)]_0^x \\
&= x\,e^x \operatorname{sh} x - e^x \operatorname{ch} x\,\log(\operatorname{ch} x).
\end{aligned}$$

19. Applicando il teorema di derivazione per serie alla funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

e alle sue derivate y', y'', otteniamo:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\
y''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
y'''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = y(x).
\end{aligned}$$

Dunque y è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''' - y = 0 \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 0. \end{cases}$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica $p(\lambda) = \lambda^3 - 1 = 0$ sono le 3 radici cubiche dell'unità:

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha_2 = e^{4\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'integrale generale complesso dell'equazione $y''' - y = 0$ è dato da

$$y(x) = c_0 e^{\alpha_0 x} + c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x},$$

dove $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 \\ c_0 + \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 = 0, \end{cases} \tag{6}$$

la cui soluzione è $c_0 = c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, come si verifica subito. (Si noti che $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, e che $\alpha_1^2 = \alpha_2$, $\alpha_2^2 = \alpha_1$.) Otteniamo infine

$$\begin{aligned}
y(x) &= \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{1}{3}e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + \tfrac{1}{3}e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x} \\
&= \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right) \\
&= \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right).
\end{aligned}$$