FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi svolti

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

   (a) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$
   (b) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$
   (d) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$
   (e) $f(x,y) = \log(xy^2 + x^2y)$

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = 2x - 5y$
   (b) $f(x,y) = x^2y$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{y+1}}$
   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

3. Calcolare i seguenti limiti :

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2 + y^2)$
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$
   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2 + y^4}$
   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin xy}{x^2 + y^2}$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

   (a) $f(x,y) = x^2 + 2xy - xy^2$
   (b) $f(x,y) = ye^{2x^2}$
   (c) $f(x,y) = y^2e^{-x}$
   (d) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2)$
   (e) $f(x,y) = e^{x/y}$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

   (a) $f(x,y) = xy\ e^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$
   (b) $f(x,y) = |x+y|\ \sin(x^2 + y)$ in $(0,0)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$
   (d) $f(x,y) = (x-y)\sqrt{|y - x^2|}$ in $(1,1)$

6. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = e^{|x-y|}$
   (b) $f(x,y) = |x|\sin(xy)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x+y|}$.

7. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$
   (b) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$
   (c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{y}$

8. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1,0)$ nella direzione $\vec{v} = (2,1)$
   (b) $f(x,y) = e^x \cos y$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,1)$

9. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

   (a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0,1,-1)$
   (b) $f(x,y) = x^y + y^x$ nel punto $(1,1,2)$
   (c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ nel punto $(2,0,2)$

10. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

    (a) $f(x,y) = \sin x \sin y$
    (b) $f(x,y) = xe^{xy}$
    (c) $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$

11. Data la funzione $f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1,0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

12. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

    (a) $f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y$
    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$
    (c) $f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$
    (d) $f(x,y) = x \cos y$
    (e) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
    (f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
    (g) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$
    (h) $f(x,y,z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$

13. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ dei seguenti campi scalare

    (a) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 - z^2$
    (b) $f(x,y,z) = y \sin z + x \sin y$
    (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

    (a) $F(x,y,z) = (xy,\ yz,\ zx)$
    (b) $F(x,y,z) = (x^2 + yz,\ xyz,\ x + zy^2)$
    (c) $F(x,y,z) = (x \cos z,\ y \sin x,\ z \cos y)$.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo graficamente :

   (a) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$: $\qquad D = \{(x,y) :\ x^2+y^2 < 1\}$
   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $1-x^2-y^2 > 0$, da cui il risultato.

   (b) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$: $\qquad D = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$
   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $x^2+y^2 > 0$, cosa verificata per tutti i punti di $\mathbf{R}^2$ esclusa l'origine degli assi.

   (c) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^4}$: $\qquad D = \{(x,y) :\ y \geq x^2\ \vee\ y \leq -x^2\}$
   Essendo $\sqrt{x}$ definita per $x \geq 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $y^2-x^4 \geq 0 \leftrightarrow y^2 \geq x^4 \leftrightarrow y \geq x^2$ oppure $y \leq -x^2$.

   (d) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$: $\qquad D = \{(x,y) :\ x^2+y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbf{Z}\}$
   Essendo la funzione $\sqrt{x}$ definita per $x \geq 0$ si ha che la funzione $f(x,y)$ risulta definita per (x,y) tali che $\sin(x^2+y^2) \geq 0 \leftrightarrow x^2+y^2 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, per qualche $k \in \mathbf{Z}$.

   (e) $f(x,y) = \log(xy^2+x^2y)$: $\qquad D = \{(x,y) :\ (x>0,\ y>0)\ \vee\ (x<0,\ 0<y<-x)\ \vee\ (x>0,\ y<-x)\}$

   Essendo $\log x$ definita per $x > 0$ si ha che $f(x,y)$ risulta definita per $xy^2+x^2y > 0 \leftrightarrow xy(y+x) > 0$. Studiando il segno delle funzioni xy e $x+y$ separatamente e utilizzando la regola dei segni si ottiene il risultato.

2. Determinare le linee di livello e l'immagine delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = 2x-5y$:
   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $2x-5y = k \leftrightarrow 2x-k = 5y \leftrightarrow y = \dfrac{2x-k}{5}$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

   (b) $f(x,y) = x^2y$
   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $x^2y = k \leftrightarrow y = \dfrac{k}{x^2}$, se $k \neq 0$ e $xy = 0$ (insieme dei punti degli assi) se $k = 0$. $Im(f) = \mathbf{R}$.

   (c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2}{y+1}}$
   Il dominio della funzione $f(x,y)$ è il semipiano $D = \{(x,y) : y > 1\}$. Le linee di livello saranno quindi tutte contenute in tale semipiano. Ponendo $f(x,y) = k$ e $k > 0$ si ottiene :

   $$\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k \leftrightarrow \frac{x^2}{y+1} = k^2 \leftrightarrow x^2 = k^2(y+1) \leftrightarrow y = \frac{x^2}{k^2} - 1.$$

   Le linee di livello per $k > 0$ risultano quindi $\{(x,y) \in D : y = \dfrac{x^2}{k^2} - 1\}$. Si ottiene invece $\emptyset$ per $k < 0$ e $\{(x,y) \in D : x = 0\}$ per $k = 0$. $Im(f) = [0, +\infty)$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
   Ponendo $f(x,y) = k$ si ottiene $\dfrac{1}{x^2+y^2} = k \leftrightarrow x^2+y^2 = \dfrac{1}{k}$, per $k > 0$, e $\emptyset$ per $k \leq 0$. $Im(f) = (0, +\infty)$.

3. Calcolare i seguenti limiti :

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Passando alle coordinate polari si ottiene : $\left|\dfrac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right| = \left|\rho\cos\theta\,\sin^2\theta\right| \leq \rho \to 0.$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2) = 0$

Passando alle coordinate polari si ottiene : $\left|\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,\log(\rho^2)\right| \leq \rho^2\log(\rho^2) \to 0.$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$ non esiste

Pongo $y = mx$ e calcolo il limite lungo le rette passanti per $(0,0)$.

$$\frac{x^3-2x(mx)+(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{x^3-2mx^2+m^2x^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{x-2m+m^2}{(1+m^2)} \to \frac{-2m+m^2}{(1+m^2)} \text{ per } x \to 0.$$

Siccome il risultato varia al variare della direzione il limite non può esitere.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$ non esiste

Eseguendo il limite lungo le rette $y = mx$ si ottiene 0. Quindi il limite di $f(x,y)$ è 0 oppure non esiste. Lungo la retta $x = 0$ il limite risulta però essere 1. Il limite quindi non esiste.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} = 0$

Passando alle coordinate polari si ottiene :

$$\left|\frac{\rho\cos\theta\,\sin(\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta)}{\rho^2}\right| \leq \frac{|\sin(\rho^2\cos\theta\,\sin\theta)|}{\rho} \leq \frac{\rho^2|\cos\theta\,\sin\theta|}{\rho} \leq \rho \to 0.$$

4. Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni

(a) $f(x,y) = x^2+2xy-xy^2$: $\quad \nabla f(x,y) = (2x+2y-y^2,\ 2x-2xy)$

(b) $f(x,y) = ye^{2x^2}$: $\quad \nabla f(x,y) = (4xye^{2x^2},\ e^{2x^2})$

(c) $f(x,y) = y^2e^{-x}$: $\quad \nabla f(x,y) = (-y^2e^{-x},\ 2ye^{-x})$

(d) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$: $\quad \nabla f(x,y) = (\dfrac{2x}{x^2+y^2},\ \dfrac{2y}{x^2+y^2})$

(e) $f(x,y) = e^{x/y}$: $\quad \nabla f(x,y) = (\dfrac{e^{x/y}}{y},\ \dfrac{-xe^{x/y}}{y^2})$

5. Calcolare (se esiste) il gradiente delle seguenti funzioni nei punti indicati:

(a) $f(x,y) = xy\ e^{\sqrt{|x+y|}}$ in $(0,0)$:

Essendo $f(x,y)$ nulla lungo gli assi il gradiente esiste ed è $(0,0)$.

(b) $f(x,y) = |x+y|\ \sin(x^2+y)$ in $(0,0)$:

$\lim_{h\to0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \dfrac{|h|\sin\,(h^2)}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$,

$\lim_{h\to0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \dfrac{|h|\sin\,(h)}{h} = 0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$,

da cui segue $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(c) $f(x,y)=\sqrt{|x^2-xy|}$ in $(0,0)$:

Essendo $f(x,y)$ nulla lungo l'asse y si ha immediatamente che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$\lim_{h\to 0^\pm}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\dfrac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\dfrac{|h|}{h}=\pm 1,$

da cui segue che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ non esiste, e di conseguenza non esiste $\nabla f(0,0)$.

(d) $f(x,y)=(x-y)\sqrt{|y-x^2|}$ in $(1,1)$:

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h-1)\sqrt{|1-(1+h)^2|}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{h\sqrt{|h||2+h|}}{h}=0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$,

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1,1+h)-f(1,1)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(1-h-1)\sqrt{|1+h-1|}}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{-h\sqrt{|h|}}{h}=0$, quindi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$,

da cui segue $\nabla f(1,1)=(0,0)$.

6. Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=e^{|x-y|}$

Essendo composizione di funzioni continue la funzione $f(x,y)$ risulta essere continua su $\mathbf{R}^2$. Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x,y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2-\{(x,y):x=y\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ sulla retta $\{(x,y):x=y\}$. Pongo (c,c), con $c\in\mathbf{R}$, generico punto della retta $x=y$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h\to 0^\pm}\frac{f(c+h,c)-f(c,c)}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{e^{|h|}-1}{h}=\pm 1$$

Ottengo quindi che non esiste $\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,c)$, per ogni $c\in\mathbf{R}$ e quindi la funzione non risulta differenziabile sulla retta $x=y$.

(b) $f(x,y)=|x|\sin(xy)$

Essendo composizione e prodotto di funzioni continue la funzione $f(x,y)$ risulta essere continua su $\mathbf{R}^2$. Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x,y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2-\{(x,y):x=0\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ sulla retta $x=0$. Pongo $(0,c)$, con $c\in\mathbf{R}$, generico punto della retta $x=0$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,c)-f(0,c)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|\sin(hc)}{h}=0$$

Ho quindi dimostrato che $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,c)=0$, per ogni $c\in\mathbf{R}$. Essendo $f(x,y)$ nulla sulla retta $x=0$, ho immediatamente che $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,c)=0$, per ogni $c\in\mathbf{R}$, e quindi $\nabla f(0,c)=(0,0)$, per ogni $c\in\mathbf{R}$.

Posso a questo punto verificare la differenziabilità di $f(x,y)$ sulla retta $x=0$ calcolando il seguente limite :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,c+k)-f(0,c)-\nabla f(0,c)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|h|\sin(h(c+k))}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Passando alle coordinate polari ottengo :

$$\frac{|\rho\cos\theta\ \sin(\ \rho\cos\theta(c+\rho\sin\theta)\ )|}{\rho}\le|\sin(\ \rho\cos\theta(c+\rho\sin\theta)\ )|\le\rho|\cos\theta(c+\rho\sin\theta)|\le\rho|c+\rho\sin\theta|\to 0$$

$f(x,y)$ risulta quindi differenziabile su $\mathbf{R}^2$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{|x+y|}$.
Essendo composizione di funzioni continue la funzione $f(x,y)$ risulta essere continua su $\mathbf{R}^2$. Essendo composizione di funzioni differenziabili la funzione $f(x,y)$ risulta essere differenziabile su

$$\mathbf{R}^2 - \{(x,y) : y = -x\}.$$

Essendo l'esistenza delle derivate parziali condizione necessaria per la differenziabilità, inizio con il calcolare le derivate parziali della funzione $f(x,y)$ sulla retta $y = -x$. Pongo $(c,-c)$, con $c \in \mathbf{R}$, generico punto della retta $y = -x$ e considero il rapporto incrementale :

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f(c+h,-c) - f(c,-c)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \pm\infty$$

Ottengo quindi che non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(c,-c)$, per ogni $c \in \mathbf{R}$ e quindi la funzione non risulta differenziabile sulla retta $y = -x$.

7. Calcolare le derivate parziali prime e seconde, verificando la validità del teorema di Schwarz:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{7}{2}(7x+4y-2)^{-3/2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(7x+4y-2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{147}{4}(7x+4y-2)^{-5/2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(7x+4y-2)^{-5/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 21(7x+4y-2)^{-5/2}$$

(b) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{1-x^2-y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{1-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2y\sqrt{1-x}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sqrt{1-x}}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{4y}(1-x)^{-3/2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$$

8. Determinare le derivate delle seguenti funzioni lungo le direzioni e nei punti assegnati:

(a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $P(1,0)$ nella direzione $\vec{v} = (2,1)$

Per definizione $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+2t,t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+2t)^2 + (1+2t)t - 2 + 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^2+5t}{t} = 5$
Siccome $f(x,y)$ è differenziabile in $(1,0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(0,0)$ e il vettore $\vec{v}$:
$\nabla f(x,y) = (2x+y, x)$ e quindi $\nabla f(1,0) = (2,1)$, da cui segue $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\ \vec{v} = (2,1)(2,1) = 5$

(b) $f(x,y) = e^x \cos y$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,2)$

Per definizione $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,2t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{e^t \cos(2t) - 1}{t} = \lim_{t\to 0} e^t \cos(2t) - 2e^t \sin(2t) = 1$
Siccome $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ si può procedere anche facendo il prodotto scalare tra il gradiente in $(0,0)$ e il vettore $\vec{v}$:
$\nabla f(x,y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$ e quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$, da cui segue $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0)\ \vec{v} = (1,0)(1,2) = 1$

(c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $P(0,0)$ nella direzione del vettore $\vec{v} = (1,1)$

Come visto nel punto (c) esercizio 5 la funzione $f(x,y)$ non ammette gradiente. Non rimane quindi che utilizzare la definizione :
$\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{|t^2 - t^2|}}{t} = 0$

9. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

(a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ nel punto $(0,1,-1)$:

$f(0,1) = -1$, $\nabla f(x,y) = (3x^2, -3y^2)$ e quindi $\nabla f(0,1) = (0,-3)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(0,1,-1)$ è quindi : $z = f(0,1) + \nabla f(0,1)(x, y-1) = 2 - 3y$.

(b) $f(x,y) = x^y + y^x$ nel punto $(1,1,2)$:

$f(1,1) = 2$, $\nabla f(x,y) = (yx^{y-1} + y^x \log y,\ x^y \log x + xy^{x-1})$ e quindi $\nabla f(1,1) = (1,1)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(1,1,2)$ è quindi : $z = f(1,1) + \nabla f(1,1)(x-1, y-1) = x+y$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto $(2,0,2)$:

$f(2,0) = 2$, $\nabla f(x,y) = (\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ e quindi $\nabla f(2,0) = (1,0)$. Il piano tangente al grafico della funzione nel punto $(2,0,2)$ è quindi : $z = f(2,0) + \nabla f(2,0)(x-2, y) = x$.

10. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

(a) $f(x,y) = \sin x \sin y$:

$\nabla f(x,y) = (\cos x\ \sin y,\ \sin x\ \cos y)$ e quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Le derivate di ordine due sono :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin x\ \sin y$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos x\ \cos y$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$
Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y) = xy + o(x^2 + y^2)$.

(b) $f(x,y) = xe^{xy}$:

$\nabla f(x,y) = (e^{xy} + xy\, e^{xy},\ x^2\, e^{xy})$ e quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Le derivate di ordine due sono :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y\, e^{xy} + xy^2\, e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^3\, e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2x\, e^{xy} + x^2 y\, e^{xy}$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$
Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y) = x + o(x^2 + y^2)$.

(c) $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$:

$\nabla f(x,y) = (2x\,\sin y^2,\ 2yx^2\,\cos y^2)$ e quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Le derivate di ordine due sono :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\sin y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4y^2x^2\,\sin y^2 + 2x^2\,\cos y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 4xy\,\cos y^2$ da cui segue $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 0$

Ottengo quindi lo sviluppo : $f(x,y) = o(x^2+y^2)$.

11. Data la funzione $f(x,y) = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2 y}$, si verifichi che non è differenziabile in $(1,0)$ e si calcolino le sue derivate direzionali in tale punto, per ogni vettore v non nullo.

Pongo $\vec{v} = (a,b)$. Per definizione si ha che : $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+at,bt)-f(1,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+\sqrt[3]{(at)^2bt}-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t\sqrt[3]{a^2b}}{t} = \sqrt[3]{a^2b}$, da cui segue $\nabla f(1,0) = (0,0)$. Non essendo verificata la formula $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \nabla f(1,0)\,\vec{v}$, concludo quindi che $f(x,y)$ non è differenziabile in $(1,0)$.

12. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y$:

Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (2x+2xy, x^2-2)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono i due punti stazionari $(\sqrt{2},-1)$ e $(-\sqrt{2},-1)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Osservo che $H(\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e $H(-\sqrt{2},-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ sono entrambe indefinite. I due punti stazionari sono quindi due punti di sella.

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$:

Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (3x^2+y, 3y^2+x)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono i due punti stazionari $(0,0)$ e $(-1/3,-1/3)$. Per determinare la natura dei due punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$, e osservo che $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice indefinita) e $H(-1/3,-1/3) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (matrice definita negativa). Il punto $(0,0)$ risulta quindi essere una sella e il punto $(-1/3,-1/3)$ un massimo relativo.

(c) $f(x,y) = \log(1+x^2y^2)$:

Essendo la funzione logaritmo una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = 1 + x^2y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x,y)$: $\nabla g(x,y) = (2xy^2, 2yx^2)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene che tutti i punti dei due assi coordinati sono punti stazionari. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Purtroppo la matrice Hessiana risulta nulla su $(0,0)$ e solo semidefinita sugli altri punti dei due assi. In ogni caso quindi non posso concludere nulla sulla natura dei punti stazionari. Posso però concludere con la seguente argomentazione : $x^2y^2 \geq 0 \to 1+x^2y^2 \geq 1 \to f(x,y) = \log(1+x^2y^2) \geq 0$. Essendo $f(x,y)$ nulla sugli assi, tutti i punti stazionari risultano essere punti di minimo assoluto e quindi di minimo relativo.

(d) $f(x,y) = x\cos y$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (\cos y, -x\sin y)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottengono gli infiniti punti stazionari $P_k = (0, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, per $k \in \mathbf{Z}$. Per determinare la natura dei punti stazionari P_k calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{pmatrix},$$

e osservo che $H(P_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$, matrice indefinita. Gli infiniti punti stazionari P_k sono quindi tutti punti di sella.

(e) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$:
Essendo la funzione radice una funzione strettamente crescente sul suo dominio posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = 1 + x^2 + y^2$. Calcolo il gradiente di $g(x,y)$: $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Ponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene l'unico punto stazionaro $(0,0)$. Per determinare la natura del punto stazionaro calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

matrice definita positiva. Il punto $(0,0)$ risulta quindi essere punto di minimo locale per la funzione $g(x,y)$, e di conseguenza anche per la funzione $f(x,y)$. Si osservi che $(0,0)$ è anche punto di minimo assoluto per $g(x,y)$ e quindi per $f(x,y)$, essendo $g(0,0) = 1$ e $g(x,y) \geq 1$ per ogni $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

(f) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$:
Essendo la funzione e^{-x} una funzione strettamente decrescente su $\mathbf{R}$ posso ridurmi a studiare la funzione $g(x,y) = x^2 + y^2$. In modo perfettamente analogo all'esercizio precedente ottengo che la funzione $g(x,y)$ ha il solo punto stazionario $(0,0)$, che risulta essere punto di minimo locale e assoluto. Posso quindi concludere che la funzione $f(x,y)$ ha il solo punto stazionario $(0,0)$, che risulta essere punto di massimo locale e assoluto.

(g) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y)$: $\nabla f(x,y) = (\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2})$. Si ha quindi che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ non è mai verificata sul dominio $D = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$. Non esistono quindi punti stazionari.

(h) $f(x,y,z) = 2(x^4 + y^4 + z^4) + 8xy$:
Calcolo il gradiente di $f(x,y,z)$: $\nabla f(x,y,z) = (8x^3 + 8y, 8y^3 + 8x, 8z^3)$. Ponendo $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$ si ottengono i tre punti stazionari $(0,0,0)$, $(1,-1,0)$ e $(-1,1,0)$. Per determinare la natura dei punti stazionari calcolo la matrice Hessiana :

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 24x^2 & 8 & 0 \\ 8 & 24y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 24z^2 \end{pmatrix}.$$

Osservo che

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ matrice indefinita })$$

$$H(1,-1,0) = H(-1,1,0) = \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 8 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix} \quad (\text{ matrice definita positiva }).$$

Ho quindi che $(0,0,0)$ risulta punto di sella e i punti $(1,-1,0)$ e $(-1,1,0)$ risultano invece di minimo relativo.

13. Calcolare ∇f e $\nabla^2 f$ dei seguenti campi scalare

(a) $f(x,y,z) = xy^2 + yz^3 - z^2$: $\quad \nabla f(x,y,z) = (y^2,\ 2xy + z^3,\ 3yz^2 - 2z) \quad \nabla^2 f(x,y,z) = 2x + 6yz - 2$

(b) $f(x,y,z) = y\sin z + x\sin y$: $\quad \nabla f(x,y,z) = (\sin y,\ \sin z + x\cos y,\ y\cos z) \quad \nabla^2 f(x,y,z) = -x\sin y - y\sin z$

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: $\quad \nabla f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(x,\ y,\ z) \quad \nabla^2 f(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

14. Calcolare divergenza e rotore dei seguenti campi vettoriali :

(a) $F(x,y,z) = (xy,\, yz,\, zx)$:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x$$

$$\text{rot } F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (-y,\, -z,\, -x)$$

(b) $F(x,y,z) = (x^2 + yz,\, xyz,\, x + zy^2)$:

$\text{div } F = \nabla \cdot F = 2x + xz + y^2$

$\text{rot } F = \nabla \wedge F = (2yz - yx,\, y - 1,\, yz - z)$

(c) $F(x,y,z) = (x \cos z,\, y \sin x,\, z \cos y)$:

$\text{div } F = \nabla \cdot F = \cos z + \sin x + \cos y$

$\text{rot } F = \nabla \wedge F = (-z \sin y,\, -x \sin z,\, y \cos x)$