DERIVATE SUCCESSIVE E MATRICE HESSIANA

Derivate parziali seconde e matrice hessiana. Sviluppo di Taylor del secondo ordine.
Punti stazionari. Punti di massimo o minimo (locale o assoluto), punti di sella.

Esercizio 1 *Calcolare le derivate parziali seconde della funzione f, nei casi seguenti:*

1) $f(x,y) = y \sin x$ *2)* $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ *3)* $f(x,y) = x^2 e^{x^2+y^2}$

4) $f(x,y) = x + x^3 y$ *5)* $f(x,y) = x^2 + x^3 y$ *6)* $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$

Esercizio 2 *Sia* $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

1) Mostrare che $(0,0)$ *è un punto stazionario per* f.

2) Studiando i segni di $f(x,y)$, *mostrare che* $(0,0)$ *non è punto di massimo né punto di minimo.*

3) Sia $g(t) = f(tx_0, ty_0)$ *la restrizione di* $f(x,y)$ *ad una qualunque retta per l'origine. Mostrare che* $t = 0$ *è punto di minimo per* $g(t)$.

Esercizio 3 *In ciascuno dei seguenti casi, determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato nell'origine della funzione f e studiare la natura del punto $(0,0)$, se critico:*

1) $f(x,y) = \sin x \, \sin y$ *2)* $f(x,y) = xe^{xy}$ *3)* $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$

Esercizio 4 *Determinare e classificare i punti stazionari della funzione f, nei seguenti casi:*

1) $f(x,y) = xy$ *2)* $f(x,y) = \log(xy)$

3) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy - y$ *4)* $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$

5) $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ *6)* $f(x,y) = \sqrt{(y-x+1)(x-y+1)}$

7) $f(x,y) = x^2 + 2xy + ay^2$ *8)* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

9) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *10)* $f(x,y) = \dfrac{1}{xy-1}$

11) $f(x,y) = \sin(x+y)$ *12)* $f(x,y) = \log(x^2 + 2xy + 2y^2 + 1)$

13) $f(x,y) = \log(e^{x^2-y^2} + 1)$ *14)* $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$

15) $f(x,y) = \log(e^{x^2+y^2} + 1)$ *16)* $f(x,y) = -x^2 + 2x \sin y + \cos y$

SVOLGIMENTI

Esercizio 1 Tutte le funzioni considerate sono di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$ e pertanto ammettono derivate parziali seconde in ogni punto, con derivate miste uguali tra loro (teorema di Schwarz).

1) Si ha $\nabla f = (y \cos x, \sin x)$ e quindi, derivando ulteriormente,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos x) = -y\sin x, \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x) = 0, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x) = \cos x.$$

2) Si ha $\nabla f = \left(2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2)\right)$ e quindi, derivando ulteriormente,

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\cos(x^2+y^2)\right) = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2),\\ f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2y\cos(x^2+y^2)\right) = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2),\\ f_{xy} &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\cos(x^2+y^2)\right) = -4xy\sin(x^2+y^2). \end{aligned}$$

3) Si ha $\nabla f = \left(2xe^{x^2+y^2} + 2x^3e^{x^2+y^2}, 2x^2ye^{x^2+y^2}\right) = \left(2\left(x+x^3\right)e^{x^2+y^2}, 2x^2ye^{x^2+y^2}\right)$ e quindi

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\left(1+3x^2\right)e^{x^2+y^2} + 2\left(x+x^3\right)2xe^{x^2+y^2} = 2\left(1+5x^2+x^4\right)e^{x^2+y^2},\\ f_{yy} &= 2x^2\left(e^{x^2+y^2} + 2y^2e^{x^2+y^2}\right) = 2x^2\left(1+2y^2\right)e^{x^2+y^2},\\ f_{yx} &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\left(x+x^3\right)e^{x^2+y^2}\right) = 2\left(x+x^3\right)2ye^{x^2+y^2} = 4xy\left(1+x^2\right)e^{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

4) Si ha $\nabla f = \left(1+3x^2y, x^3\right)$ e quindi, derivando ulteriormente, $f_{xx} = 6xy$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = f_{yx} = 3x^2$.

5) Si ha $\nabla f = \left(2x+3x^2y, x^3\right)$ e quindi $f_{xx} = 2+6xy$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = f_{yx} = 3x^2$.

6) Si ha $\nabla f = \left(2x\sin(y^2), 2x^2y\cos(y^2)\right)$ e quindi, derivando ulteriormente,

$$f_{xx} = \sin(y^2), \quad f_{yy} = 2x^2\left(\cos(y^2) - 2y^2\sin(y^2)\right), \quad f_{xy} = f_{yx} = 4xy\cos(y^2).$$

Esercizio 2 La funzione è un polinomio, quindi è di di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$.

1) Si ha $\nabla f(x,y) = (12x^3 - 8xy, -4x^2 + 2y)$, da cui segue $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e quindi $(0,0)$ è punto stazionario per f.

2) L'incremento $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ è positivo lungo gli assi cartesiani (in quanto $f(x,0) = 3x^4 \geq 0$ e $f(0,y) = y^2 \geq 0$), per cui $(0,0)$ non è punto di massimo. D'altra parte, la restrizione $f(x,2x^2)$ di $f(x,y)$ alla parabola $y = 2x^2$ è tale che $f(x,2x^2) = -x^4 \leq 0 = f(0,0)$ e quindi $(0,0)$ non è nemmeno punto di minimo.

3) Si ha $g(t) = f(at,bt) = 3a^4t^4 - 4a^2bt^3 + b^2t^2$ e $g'(t) = 2\left(6a^4t^2 - 6a^2bt + b^2\right)t$. Poiché il polinomio $p(t) = 6a^4t^2 - 6a^2bt + b^2$ è positivo nell'intorno di $t = 0$ (ad esempio perché $p(0) = b^2 > 0$ se $b \neq 0$ e $p(t) = 6a^4t^2$ se $b = 0$), la derivata $g'(t)$ ha il segno di t nell'intorno di $t = 0$ e quindi, sempre nell'intorno di $t = 0$, $g(t)$ è decrescente per $t < 0$ e crescente per $t > 0$. Dunque $t = 0$ è punto di minimo locale per $g(t)$.

Esercizio 3 Tutte le funzioni considerate sono di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$ e pertanto gli sviluppi di Taylor cercati esistono; essi sono dati da

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + o(x^2+y^2) \\ &= f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2\right) \\ &\quad + o(x^2+y^2) \end{aligned}$$

per $(x,y) \to (0,0)$.

1) Si ha $f(0,0) = (0,0)$ e $\nabla f(x,y) = (\cos x\,\sin y, \sin x\,\cos y)$, da cui segue $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Le derivate di ordine due sono

$$f_{xx} = f_{yy} = -\sin x\,\cos y, \quad f_{xy} = f_{yx} = \cos x\,\cos y,$$

per cui si ottiene $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0$ e $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 1$. Dunque $f(x,y) = xy + o(x^2+y^2)$.
L'origine è punto critico e nel suo intorno il segno di $\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$ coincide con il segno di xy, per cui $(0,0)$ è punto di sella.

2) Si ha $f(0,0) = (0,0)$ e $\nabla f(x,y) = (e^{xy} + xye^{xy}, x^2e^{xy})$, da cui segue $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Le derivate di ordine due sono

$$f_{xx} = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}, \quad f_{yy} = x^3e^{xy}, \quad f_{xy} = f_{yx} = 2x\,e^{xy} + x^2y,$$

per cui risulta $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$. Dunque si ottiene lo sviluppo $f(x,y) = x + o(x^2+y^2)$.
L'origine non è punto critico.

3) Si ha $f(0,0) = (0,0)$ e $\nabla f(x,y) = (2x\sin(y^2), 2yx^2\cos(y^2))$, da cui segue $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Le derivate di ordine due sono

$$f_{xx} = 2\sin(y^2), \quad f_{yy} = -4y^2x^2\sin(y^2) + 2x^2\cos(y^2), \quad f_{xy} = f_{yx} = 4xy\cos(y^2),$$

per cui risulta $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$. Dunque si ottiene lo sviluppo $f(x,y) = o(x^2+y^2)$.
L'origine è punto critico, ma lo sviluppo trovato non aiuta nel determinarne la natura. Si tratta comunque di un punto di minimo locale, in quanto nell'intorno di $(0,0)$ risulta $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$.

Esercizio 4 *1)* La funzione $f(x, y)$ è definita e continua in tutti i punti del piano. Inoltre, è derivabile con derivate parziali continue di ogni ordine nel suo dominio, essendo un polinomio. L'unico punto stazionario di f è $(0, 0)$ ed è un punto di sella per $f(x, y)$. Infatti, le due derivate parziali sono $f_x = y$ ed $f_y = x$. Ponendole uguali a zero si ottiene $y = 0, x = 0$ e quindi l'origine è l'unico punto stazionario. La matrice hessiana è

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è non definita in segno. Quindi $(0, 0)$ è un punto di sella per f.
Osserviamo che il grafico di f è la superficie di equazione $z = xy$ che rappresenta un iperboloide a sella avente l'origine come vertice. Il piano tangente alla superficie nel vertice è $z = 0$ e questo giustifica il fatto che è stazionario. Ruotando il sistema di riferimento di $\pi/4$ intorno all'asse z, viene riportato in forma canonica.

2) La funzione $f(x, y)$ è definita e continua nel primo e nel terzo quadrante, assi esclusi. Nel suo dominio, è derivabile con derivate parziali continue di ogni ordine, ma non ha punti stazionari. Infatti, le due derivate parziali sono $f_x = \frac{1}{x}$ ed $f_y = \frac{1}{y}$, che non si annullano mai.

3) La funzione è un polinomio e quindi è continua con derivate parziali continue di ogni ordine. Le derivate parziali prime sono $f_x = 3x^2 - 2y$ ed $f_y = 2y - 2x - 1$. Per calcolare i punti stazionari, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $2y = 2x + 1$; sostituendo nella prima equazione, otteniamo $3x^2 - 2x - 1 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1/3, x_2 = 1$. Sostituendo i valori trovati, ricaviamo le coordinate dei punti stazionari che sono $A = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ e $B = (1, \frac{3}{2})$. La matrice hessiana è

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

In A, essa diventa

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è non definita in segno avendo $P(t) = t^2 - 8$ come polinomio caratteristico. In B, essa diventa

$$H_f(B) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è definita positiva avendo $P(t) = t^2 - 8t + 8$ come polinomio caratteristico. In conclusione, A è un punto di sella, mentre B è un punto di minimo.

4) La funzione è un polinomio ed è quindi continua con derivate parziali di ogni ordine continue in $\mathbb{R}^2$. Le due derivate parziali prime sono $f_x = 2x - 2, f_y = 4y$ e l'unico punto stazionario è $(1, 0)$. La matrice hessiana è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è diagonale con autovalori positivi. Quindi H_f è definita positiva e $(1,0)$ è punto di minimo.
Osserviamo che la superficie grafico di $f(x,y)$ ha equazione $z = x^2 + 2y^2 - 2x$ ed è un paraboloide ellittico con asse di simmetria parallelo all'asse z. Quindi il vertice è il punto di minimo.

5) La funzione $f(x,y)$ è continua con derivate parziali di ogni ordine continue in $\mathbb{R}^2$. Le due derivate parziali prime sono $f_x = -2xe^{1-x^2-y^2}$, $f_y = -2ye^{1-x^2-y^2}$ e quindi l'unico punto stazionario è $A = (0,0)$, essendo l'esponenziale mai nulla. La matrice hessiana di f in A è

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} -2e & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}$$

che è diagonale, con autovalori negativi. Quindi essa è definita negativa ed A è punto di massimo per f.
Osserviamo che f dipende (x,y) solo tramite $\sqrt{x^2+y^2}$ e quindi il suo grafico è una superficie di rotazione attorno all'asse z. Inoltre, l'esponente $1-x^2-y^2$ assume solo valori minori od uguali ad 1 e quindi $f(x,y)$ assume tutti e soli i valori compresi tra 0 ed e, 0 escluso.

6) Il dominio di $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+2xy-y^2} = \sqrt{1-(x-y)^2}$ è costituito da tutti e soli i punti del piano per cui $1-x^2+2xy-y^2 \geq 0$. La disequazione può anche riscriversi come $(x-y)^2 \leq 1$, che è risolta per $-1 \leq x-y \leq 1$. Quindi $f(x,y)$ è definita nella striscia di piano compresa tra le due rette parallele $x-y=-1$ ed $x-y=1$. Nel suo dominio, $f(x,y)$ è continua. Essa è derivabile con derivate di ogni ordine continue in $-1 < x-y < 1$ ossia nel dominio privato delle due rette. Le derivate parziali sono $f_x = \frac{-x+y}{\sqrt{1-x^2+2xy-y^2}}$ ed $f_y = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2+2xy-y^2}}$, che si annullano in infiniti punti. In particolare, sono nulle in tutti e soli i punti della retta di equazione $x-y=0$. Tali punti sono di massimo perché $f(x,y) \leq 1$ in tutti i punti del suo dominio e vale esattamente 1 nei punti della retta $x-y=0$.
Osserviamo che il grafico di f è una porzione di cilindro parabolico con generatrici parallele al piano xy.

7) La funzione $f(x,y)$ è definita da un polinomio e quindi è continua con derivate parziali continue di ogni ordine. Le derivate parziali prime sono $f_x = 2x+2y$, $f_y = 2x+2ay$. Se $a \neq 1$ abbiamo un unico punto stazionario che è l'origine, mentre se $a=1$ i punti stazionari sono tutti e soli i punti della retta $x+y=0$. La matrice hessiana è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2a \end{pmatrix}$$

che risulta non definita in segno se $a<1$, semidefinita positiva se $a=1$ e definita positiva se $a>1$. Quindi l'origine è un punto di sella se $a<1$ ed è un punto di minimo se $a>1$. Se $a=1$, la funzione diventa $f(x,y) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$ e quindi tutti i punti della retta $x+y=0$ sono punti di minimo.
Osserviamo che il grafico di f è un paraboloide iperbolico avente l'asse z come asse di simmetria se $a<1$, è un cilindro parabolico avente generatrici parallele al piano xy se $a=1$ ed è un paraboloide ellittico avente l'asse z come asse di simmetria se $a>1$.

8) La funzione è definita in tutti i punti del piano che non appartengono all'iperbole equilatera di equazione $xy = 1$. Nel suo dominio, è continua con derivate parziali di ogni ordine continue. Le due derivate parziali prime sono $f_x = -\frac{y}{(xy-1)^2}$, $f_y = -\frac{x}{(xy-1)^2}$, che si annullano solo in $(0,0)$. La matrice hessiana è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che non è definita in segno. Quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

9) La funzione è definita in tutti i punti del piano diversi dall'origine ed è ivi continua con derivate parziali di ogni ordine continue. Le derivate parziali prime sono $f_x = \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$. I punti stazionari sono allora quelli nel dominio di f per cui $x^2 - y^2 = 0$ e quindi sono i punti delle rette $x - y = 0$ ed $x + y = 0$, eccetto l' origine. Sia (a,a) un punto della prima retta, con $a \neq 0$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(a,a) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{8a^2} \\ \frac{1}{8a^2} & -\frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}$$

ed è definita negativa. Quindi i punti della retta $x - y = 0$ sono tutti punti di massimo. Sia $(a,-a)$ un punto della seconda retta, con $a \neq 0$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(a,-a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{8a^2} \\ \frac{1}{8a^2} & \frac{1}{2a^2} \end{pmatrix}$$

ed è definita positiva. Quindi tali punti sono punti di minimo.

10) La funzione f è definita nei punti del piano per cui $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, ossia nei punti all'interno o sulla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1. La funzione f è continua nel suo dominio ed è derivabile con derivate parziali continue di ogni ordine nei punti interni alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1. Le derivate parziali prime sono $f_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $f_y = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ e quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che è diagonale con autovalori negativi. Quindi è definita negativa, e l'origine è un punto di massimo.
Osserviamo che il grafico della funzione è la semisfera di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $z \geq 0$ e questo è coerente con lo studio del punto stazionario.

11) La funzione è definita e continua con derivate parziali di ogni ordine continue in tutti i punti del piano. Le derivate parziali prime sono $f_x = \cos(x+y)$, $f_y = \cos(x+y)$ e quindi i punti stazionari sono tutti e soli quelli delle rette di equazione $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. La matrice hessiana è nulla in tutti i punti stazionari e quindi non può essere usata per studiare la loro natura. Osserviamo comunque che, per le proprietà della funzione seno, abbiamo che tutti i punti delle rette di equazione $x + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono punti di massimo, mentre tutti quelli delle rette di equazione $x + y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sono punti di minimo.

12) La funzione può anche scriversi come $f(x,y) = \log((x+y)^2 + y^2 + 1)$ e quindi è definita, continua e derivabile con derivate parziali di ogni ordine continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono $f_x = \frac{2x+2y}{x^2+2xy+2y^2+1}$, $f_y = \frac{2x+4y}{x^2+2xy+2y^2+1}$ e l'unico punto stazionario è $(0,0)$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ed è semidefinita, quindi non utile ai fini dello studio della natura del punto stazionario. In ogni caso, $(0,0)$ è un punto di minimo, perché $(x+y)^2 + y^2 + 1 \geq 1$ per ogni scelta di (x,y). L'affermazione segue allora dalla monotonia della funzione logaritmo.

13) La funzione è definita, continua e con derivate parziali di ogni ordine continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono $f_x = \frac{2x}{1+e^{y^2-x^2}}$, $f_y = \frac{-2y}{1+e^{y^2-x^2}}$ e l'unico punto stazionario è $(0,0)$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ed è diagonale con autivalori discordi. Quindi $(0,0)$ è un punto di sella.

14) La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, perché il polinomio omogeneo argomento della radice è sempre non negativo. Quindi $f(x,y)$ è definita e continua con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono $f_x = \frac{(2x+y)e^{\sqrt{x^2+xy+y^2}}}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $f_y = \frac{(x+2y)e^{\sqrt{x^2+xy+y^2}}}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$. L'unico punto stazionario è quindi $(0,0)$. Visto che l'argomento della radice è sempre ≥ 0 e che le funzioni radice ed esponenziale sono monotone crescenti, abbiamo che $(0,0)$ è un punto di minimo.

15) La funzione è definita, continua e con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali prime sono $f_x = \frac{2x}{1+e^{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{2y}{1+e^{x^2+y^2}}$ e l'unico punto stazionario è $(0,0)$. La matrice hessiana in tale punto è

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è diagonale con autovalori positivi ed è quindi definita positiva. Conseguentemente, il punto $(0,0)$ è di minimo.

16) La funzione è definita, continua e con derivate parziali di ogni ordine continue in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo inoltre che è periodica rispetto alla y. Le due derivate parziali prime sono $f_x = -2x + 2\sin y$, $f_y = 2x\cos y - \sin y$ e quindi i punti stazionari sono $(2k\pi, 2k\pi)$, $(\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Le matrici hessiane nei vari punti stazionari sono

$$H_f(2k\pi, 2k\pi) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che è non definita in segno e quindi i relativi punti stazionari sono punti di sella;

$$H_f(\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

che è non definita in segno e quindi i relativi punti stazionari sono punti di sella;

$$H_f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che è definita negativa e quindi i relativi punti stazionari sono punti di massimo;

$$H_f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

che è definita negativa e quindi i relativi punti stazionari sono punti di massimo.