SOLUZIONE COMPITINO DI MATEMATICA DISCRETA PARTE I
12 Febbraio 2009

Cognome e Nome (a stampatello):
Numero di Matricola:

1. Sia $\{5, 15\} \subseteq \mathbb{N}_0$ un sottoinsieme finito dei numeri naturali. Definire una proprietà P tale che $\{5, 15\} = \{x : x \text{ soddisfa } P\}$.

   Soluzione: $P(x) \equiv (x = 5) \vee (x = 15)$. Un'altra possibilità è $P(x) \equiv (x \leq 15) \wedge$ (5 divide x) $\wedge$ $(x \neq 0, 10)$.

2. Sia X un insieme. Dimostrare che per tutti i sottoinsiemi A, B di X vale la seguente proprietà: $A \cup (A \cap B) = A$.

   Soluzione: L'uguaglianza delle due espressioni insiemistiche si dimostra provando che $A \cup (A \cap B) \subseteq A$ e $A \subseteq A \cup (A \cap B)$.

   $A \cup (A \cap B) \subseteq A$: Se $x \in A \cup (A \cap B)$ allora $x \in A$ oppure $x \in A \cap B$, per definizione dell'operatore insiemistico di unione $\cup$. In entrambi i casi $x \in A$.

   $A \subseteq A \cup (A \cap B)$: Se $x \in A$ allora x appartiene ad ogni sovrainsieme di A, in particolare all'insieme $A \cup (A \cap B)$.

3. Definire l'usuale ordinamento sui numeri naturali e successivamente provare la proprietà transitiva di tale ordinamento.

   Soluzione. Definizione di $\leq$ su $\mathbb{N}_0$: $x \leq y$ sse $\exists k(y = x + k)$. La prova della proprietà transitiva della relazione $\leq$ si trova a pagina 4 degli appunti online.

4. Formalizzare la seguente frase in linguaggio naturale: "Miriam ammira qualche professore".

   Soluzione: Si consideri una costante "m", un predicato unario "P(x)" che significa "x è un professore" e un predicato binario "A(x,y)" che significa "x ammira y". Allora la frase si formalizza come segue: $\exists x(A(m, x) \wedge P(x))$.

5. Dimostrare per induzione che $n^2 \geq n + 1$ per ogni numero naturale $n \geq 2$.

   Soluzione. Il caso base $n = 2$ è vero: $2^2 = 4 \geq 2 + 1 = 3$. Supponiamo che la disuguaglianza sia vera per n e dimostriamola per $n + 1$:

   $$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq_{Ip.Ind.} (n+1) + 2n + 1 = (n+1) + 1 + 2n \geq (n+1) + 1.$$

   L'ultima disuguaglianza vale perché $2n \geq 0$ per ogni numero naturale n. In conclusione, il principio di induzione ci permette di concludere che $(\forall n \geq 2)(n^2 \geq n + 1)$.

6. Verificare se la funzione $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, definita da

$$f(x) = \text{Se } x \text{ e' pari allora } x+1 \text{ altrimenti } x-1$$

e' iniettiva e surgettiva.

Soluzione. Surgettività: Sia x un arbitrario numero naturale. Se x è pari, allora $f(x+1) = (x+1)-1 = x$ (perché $x+1$ è dispari). Se x è dispari, allora $f(x-1) = (x-1)+1 = x$ (perché $x-1$ è pari). Quindi f è surgettiva.

Iniettività: Supponiamo che $f(x) = f(y)$. Allora x, y sono o entrambi pari o entrambi dispari. Se x è pari e y è dispari (o viceversa), allora $f(x)$ è dispari e $f(y)$ è pari. Quindi non potremmo avere $f(x) = f(y)$.

Caso x, y pari: da $x + 1 = f(x) = f(y) = y + 1$, sottraendo 1 ad entrambi i membri dell'uguaglianza $x + 1 = y + 1$ otteniamo $x = y$.

Caso x, y dispari: da $x - 1 = f(x) = f(y) = y - 1$, sommando 1 ad entrambi i membri dell'uguaglianza $x - 1 = y - 1$ otteniamo $x = y$.

In conclusione la funzione f è iniettiva.

7. Sia $A = \{a, b\}$ un alfabeto finito. Si definisca una funzione iniettiva dall'insieme dei numeri naturali all'insieme A^* delle stringhe su A.

Soluzione. Si definisca per induzione $a^0 = \epsilon$ (stringa vuota) e $a^{n+1} = aa^n$. Allora n è la lunghezza della stringa a^n. La funzione $f : \mathbb{N}_0 \to A^*$, definita da $f(n) = a^n$, è iniettiva. Se $n \neq k$ allora $f(n) \neq f(k)$ perché le stringhe $f(n) = a^n$ e $f(k) = a^k$ hanno lunghezza diversa e quindi sono distinte.

8. Si definisca una relazione di equivalenza sull'insieme dei numeri naturali con infinite classi di equivalenza.

Soluzione. xRy sse $x = y$. Si hanno infinite classi di equivalenza una per ciascun numero naturale.

9. Sia A un insieme finito di cardinalità $n \geq 3$. Si determini il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 3. Giustificare la risposta.

Soluzione Si trova a pagina 17 dei miei appunti online.

10. Si dimostri che $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

Soluzione: Si trova a pagina 19 dei miei appunti online.