COMPITO DI LOGICA
9 Giugno 2009

1. Si consideri un linguaggio del primo ordine con una costante 0 ed un predicato binario R. Esprimere formalmente le seguenti frasi:

   a. La relazione R e' transitiva ma non riflessiva.

   b. Esistono esattamente due elementi x tali che $0Rx$.

   Possibile Soluzione:

   (a) $(\forall xyz.xRy \wedge yRz \to xRz) \wedge \exists x.\neg xRx$.

   (b) $\exists xy.0Rx \wedge 0Ry \wedge \neg x = y \wedge (\forall z.0Rz \to (z = x \vee z = y))$

2. Sia $\mathcal{L}_{Ar} = \{+, *, 0, 1\}$ il linguaggio dell'aritmetica. Definire due modelli del primo ordine di $\mathcal{L}_{Ar}$ che abbiano come universo rispettivamente

   a. L'insieme $\{a, b, c, d\}$.

   b. L'insieme dei numeri reali.

   Si scriva poi un enunciato vero nel primo modello e falso nel secondo.

   Possibile Soluzione:

   Modello $\mathcal{M}$ di universo $M = \{a, b, c, d\}$: $0^{\mathcal{M}} = a$, $1^{\mathcal{M}} = b$, $x +^{\mathcal{M}} y = x *^{\mathcal{M}} y = a$ for all $x, y \in M$.

   Modello $\mathcal{N}$ di universo N = insieme dei numeri reali: $0^{\mathcal{N}} = 0$, $1^{\mathcal{N}} = 1$, mentre $+^{\mathcal{N}}$ e $*^{\mathcal{N}}$ sono rispettivamente la somma ed il prodotto di numeri reali.

   $\forall xy.x + y = x * y$ e' un enunciato vero nel primo modello ma non nel secondo.

3. Si descriva il teorema di completezza della logica del primo ordine.

4. Verificare con il metodo dei tableaux se i seguenti enunciati sono verita' logiche

   a. $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$;

   b. $(\neg A \to A) \vee A$.

Soluzione (a):

(1) F $(A \to B) \to (\neg A \to \neg B)$

(2) T $A \to B$

(3) F $\neg A \to \neg B$

(4) T $\neg A$ da (3)

(5) F $\neg B$ da (3)

(6) F A da (4)

(7) T B da (5)

(8) F A T B da (2)

I rami non contengono alcuna contraddizione. Quindi la formula non e' una verita' logica.

Soluzione (b):

(1) F $(\neg A \to A) \vee A$

(2) F $\neg A \to A$

(3) F A

(4) T $\neg A$ da (2)

(5) F A da (2)

(6) F A da (4)

Come sopra.