Probabilità e Statistica
Prova d'esame
14 dicembre 2012

AVVERTENZE:

1. **La prova dura ~~1 ora e 30 minuti.~~** 2 ore
2. **E' ammesso il solo utilizzo delle tavole presenti nel sito del corso.**
3. **Alla fine della prova si dovranno consegnare SOLO i fogli con il testo del compito e le soluzioni riportate in modo sintetico negli appositi spazi. NON si accetteranno fogli di brutta copia.**
4. **Il compito è considerato insufficiente se vi sono meno di 6 risposte esatte ai quesiti a risposta multipla.**

COGNOME .... **NOME** .... **MATRICOLA** ....

Quesiti a risposta multipla

1. Se per una variabile quantitativa lo scarto interquartile è zero, allora

   A la media aritmetica è zero

   B tutte le frequenze assolute sono uguali tra loro

   • C la mediana coincide con il primo quartile

2. Quali delle seguenti espressioni è sempre zero?

   A $\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}$

   • B $\sum_{i=1}^{n} y_i - n\bar{y}$

   C $\sum_{i=1}^{n} y_i - \bar{y}/n$

3. Se due v.a. $X \sim$ Bernoulli(0.1) e $Y \sim$ Bernoulli(0.6) sono indipendenti, allora:

   A $P(X=1|Y=0)=0.6$

   B $P(X=1|Y=0)=0.06$

   • C $P(X=1|Y=0)=0.1$

4. Se due eventi A e B sono incompatibili, allora

   • A $P(B|A)=0$

   B $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

   C $P(B|A)=P(B)$

5. Se due v.c. X e Y sono indipendenti

   • A $\mathbb{V}ar(X-2Y)=\mathbb{V}ar(X)+4\mathbb{V}ar(Y)$

   B $\mathbb{V}ar(X-Y)=\mathbb{V}ar(X)-\mathbb{V}ar(Y)$

   C $\mathbb{V}ar(2X+Y)=2\mathbb{V}ar(X)+\mathbb{V}ar(Y)$

6. Se $X_1,\dots X_n$ sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite, allora

   A $\bar{X}_n$ ha distribuzione normale standard

   B $\bar{X}_n$ ha distribuzione approssimatamente normale standard

   • C $\bar{X}_n$ ha distribuzione normale solo se le X_i, $i=1,\dots,n$, sono normali

7. La funzione di ripartizione di una v.a. non è mai

   • A negativa

   B pari a uno

C non crescente

8. Se la successione di variabili casuali X_n, $n = 1, 2, \dots$ converge in probabilità a c allora:

   A $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$

   B $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = c$

   • C $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| > \varepsilon) = 0 \; \forall \, \varepsilon > 0$

9. Si associ al comando `qnorm(0.03, 1, 2)` il corrispondente risultato:

   A -1.660

   B 4.762

   • C -2.762

   NB: Bisogna prima standardizzare !! si deve lavorare con una normale e usare le tavole !!

10. Quale comando si utilizza in R per calcolare $P(X > 3.3)$ se $X \sim Exp(\lambda = 3)$?

    OK A `1-pexp(3.3, 3)`

    B `1-dexp(3.3, 3)`

    NO → • C `1- pexp(3, 3.3)`

SOLUZIONE: $X_1, \dots, X_n \to X \sim U(0,1)$; $Y_1 = \text{sen}(X_1), \dots, Y_n = \text{sen}(X_n) \to Y = \text{sen}(X)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n} \to E(Y) = \int_0^1 f(x)\,\text{sen}(x)\,dx$ dove $f(x)$ dell'uniforme quindi vale 1 in $(0,1)$

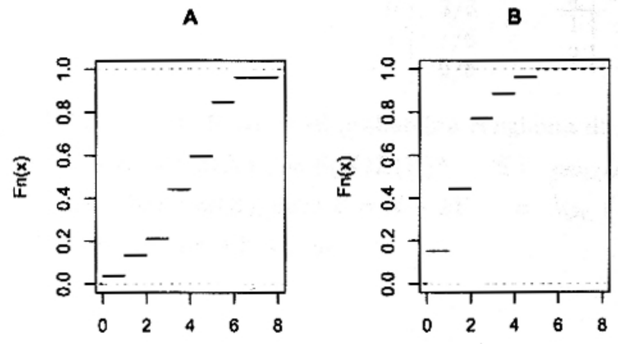
Esercizi

1. Si scriva una funzione di R che approssimi usando un metodo Monte Carlo il seguente integrale:

$$\int_0^1 \sin(x)\,dx.$$

   Si scriva l'enunciato e si dimostri l'importante teorema del calcolo delle probabilità su cui si basano i metodi Monte Carlo.

2. È stato rilevato il numero settimanale di ordini inevasi in due filiali (A e B) di una società nell'arco di un anno. Per ogni filiale vengono rappresentate le rispettive funzioni di ripartizione empiriche.



Si chiede di

(a) chiarire quali sono le unità statistiche, la numerosità della popolazione e le variabili rilevate;

Sono le [redacted] settimane

È il 52 n° settimane

Gli ordini inevasi per ogni filiale

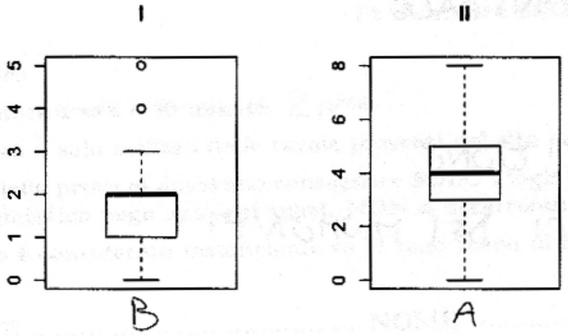
③ SOLUZIONI:

a) Calcoliamo il valore standardizzato $z = \frac{505-500}{1.418} = 3.525$ da cui la probabilità di produrre una scatola con più di 505 grammi è $1-\Phi(z) = 0.00021$

b) Assumendo $X \sim Bin(20000, 0.00021)$ si ha $E(X) = 20000 \cdot 0.00021 = 4.23461 \approx 4$

c) Il quantile di ordine $\frac{2}{1000}$ di una normale standard è -2.878 e quindi il valore cercato della deviazione standard è $\frac{490-500}{-2.878} = 3.474$ da cui la varianza è $\sigma^2 = (3.474)^2 = 12.072$

(b) associare ai seguenti diagrammi a scatola e baffi (I e II) le rispettive funzioni di ripartizione empiriche;



(c) completare la seguente tabella:

	A	B
Minimo	0	0
Mediana	4	2
Massimo	8	5
Scarto interquartile	2	1

(d) Sulla base di quanto osservato, quale delle due filiali risulta più efficiente? B

3. Una data confezione di pasta pesa in media 500 grammi. Supponendo che il peso delle confezioni sia ben descritto da una variabile casuale normale e che la varianza sia pari a 2.012,

   (a) qual è la probabilità di produrre una scatola con almeno 505 grammi di pasta?

   (b) Supponendo di spedire un lotto di 20000 confezioni, quante confezioni ci si attende possano avere un peso maggiore di 505 grammi?

   (c) Una confezione è giudicata non vendibile se contiene meno di 490 grammi di pasta. Supponendo ora che il peso delle confezioni sia distribuito come una variabile casuale normale di media 500 e che una confezione sia non vendibile con probabilità 0.002, quale dovrà essere la varianza della variabile casuale?

4. Siano X e Y due variabili casuali discrete. Si considerino le funzione di probabilità:

x	$p_X(x)$
0	3/6
1	1/6
2	2/6

y	$p_{Y\mid X}(y\mid x) \quad (x = 0, 1, 2)$
1	3/5
2	2/5

$\Rightarrow$

X\Y	1	2	
0	9/30	6/30	3/6
1	3/30	2/30	1/6
2	6/30	4/30	2/6
	3/5	2/5	1

   (a) Calcolare la funzione di probabilità congiunta di X e Y.

   (b) È vero che $E(XY) = E(X)E(Y)$? SI perché $X \perp\!\!\!\perp Y$

   (c) Calcolare $\mathrm{Var}(Z)$, dove $Z = X - 2Y$. $= \mathrm{Var}(X) + 4\,\mathrm{Var}(Y)$

   (d) Calcolare $\Pr(XY < 1.6)$.

$\Uparrow$

NB: per riempire la tabella:

$P(0/1) = P_X(0) \cdot P_Y(1)$

$\vdots$

$P(2/2) = P_X(2) \cdot P_Y(2)$

Perché sono indipendenti, perché $P_{Y|X}$ non dipende da X e quindi $P_{Y|X} = P_Y$

ESEMPI DI DOMANDE TEORICHE:

TEOREMI + DIM:

- PROBABILITA' TOTALE
- BAYES
- LEGGE DEI GRANDI NUMERI
- TEOREMA LIMITE CENTRALE

PROPRIETA':

- FUNZIONE DI RIPARTIZIONE
- FUNZIONE GENERATRICI DEI MOMENTI
- VALORI ATTESI
- VARIANZA
- COVARIANZA e CORRELAZIONE

DEFINIZIONI:

- PROBABILITA' (ASSIOMATICA)
- INDIPENDENZA
- FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI
- CONVERGENZA (PROBABILITA' e DISTRIBUZIONE)
- FUNZIONE DI RIPARTIZIONE